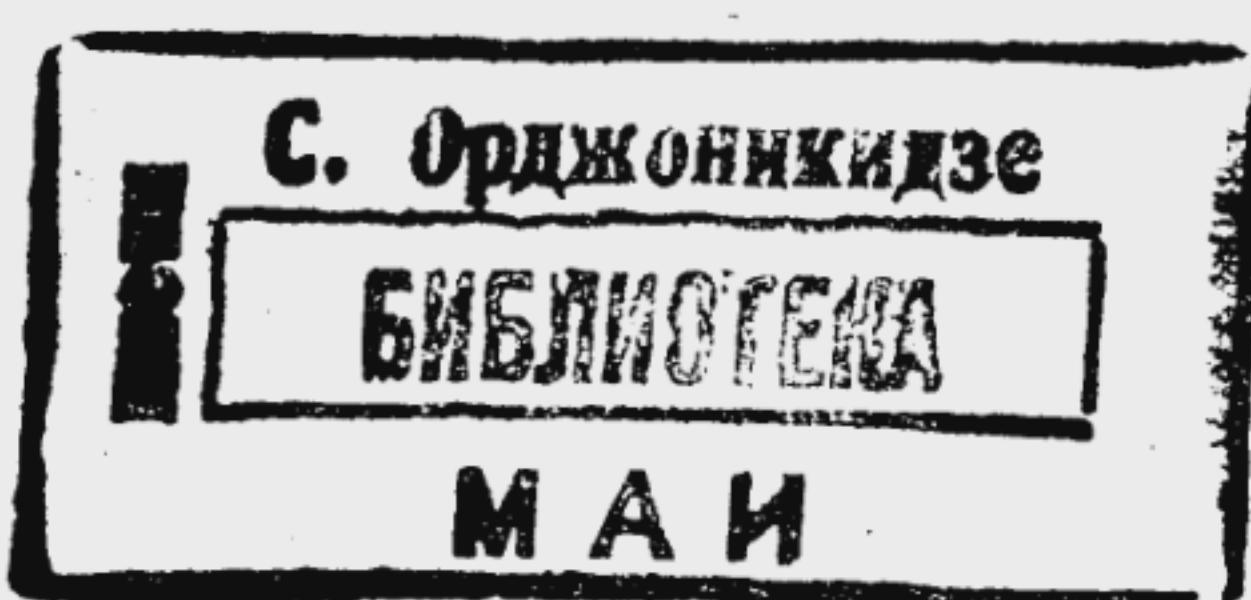


**УПРАВЛЕНИЕ
И НАВИГАЦИЯ
ИСКУССТВЕННЫХ
СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ
на околопланетных
орбитах**

629.2к
11677

УПРАВЛЕНИЕ И НАВИГАЦИЯ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ на околокруговых орбитах

1415660-1



МАИ НТБ



Москва
МАШИНОСТРОЕНИЕ
1988

Авторы: М. Ф. РЕШЕТНЕВ, А. А. ЛЕБЕДЕВ, В. А. БАРТЕНЕВ,
М. Н. КРАСИЛЬЩИКОВ, В. А. МАЛЫШЕВ, В. В. МАЛЫШЕВ

УДК 629.78

Управление и навигация искусственных спутников Земли на околокруговых орbitах / М. Ф. Решетнев, А. А. Лебедев, В. А. Бартенев и др. — М.: Машиностроение, 1988. — 336 с. — ISBN 5-217-00135-6.

Рассмотрены методы формирования баллистического обеспечения космических аппаратов (КА), движущихся по околокруговым орбитам. Основное внимание уделено разработке математических моделей движения и возмущений, а также определению орбит и планированию работы навигационных средств. Рассмотрены вопросы управления как отдельными искусственными спутниками Земли (ИСЗ), так и системами ИСЗ в целом.

Для научных работников. Будет полезна инженерам, занимающимся управлением и навигацией КА.

Библиогр.: 43 назв. Ил. 49. Табл. 9.

Рецензент д-р техн. наук В. Н. ПОЧУКАЕВ

у 360700000—125
038(01)—88 125—88

© Издательство «Машиностроение», 1988

ISBN 5-217-00135-6

ПРЕДИСЛОВИЕ

Одним из основных типов аппаратов, широко используемых в настоящее время в космонавтике (идет ли речь об отдельных аппаратах, выполняющих частные задачи, или о космических системах связи, навигации и т. д., состоящих из совокупности аппаратов), безусловно, являются искусственные спутники Земли, находящиеся на околокруговых орbitах.

В данной монографии предпринята попытка систематизированно, с единых теоретических и технических позиций изложить основные принципы создания так называемого баллистического обеспечения для такого типа КА. Под баллистическим обеспечением в данном случае понимается совокупность алгоритмов и программ, позволяющих решить различные задачи управления и навигации. Значительное внимание уделено основам теории возмущенного и невозмущенного движения, управления и навигации ИСЗ на околокруговых орбитах. Этот материал изложен таким образом, чтобы обеспечить исследователю возможность решения задач, связанных с процессом управления и навигации КА. Одной из таких задач является задача оптимального управления орбитальным движением. Поэтому в монографии рассмотрены элементы современной теории оптимального управления (детерминированной, стохастической и в условиях неопределенности). Изложенные основы теории оптимального управления включают новые результаты, полученные авторами. Это в полной мере относится и к вопросам синтеза навигационных алгоритмов и оптимизации работы навигационных средств.

Теоретический и практический интерес представляют рекуррентные алгоритмы обработки информации, в том числе минимаксный, а также теория и методы оптимизации работы наземных и бортовых навигационных средств. Последняя основана на использовании аналитических свойств уравнения Риккати для апостериорной корреляционной матрицы.

На основе изложенной теории решен ряд важных прикладных задач управления и навигации ИСЗ на околокруговых орбитах.

Центральной среди задач управления является задача перевода ИСЗ из одного положения в другое. Задача рассматривается как в детерминированной постановке, когда неучт возмущающих факторов допустим, так и в стохастической и минимаксной постановках, когда возмущающие факторы оказывают заметное влияние, и они могут трактоваться либо как случайные, либо как неопределенные. Решение задач доводится до конкретных алгоритмов управления, реализуемого с помощью двигательной установки как большой, так и малой тяги.

Среди задач навигации наибольший интерес представляет задача определения орбиты ИСЗ с учетом широкого спектра случайных и неопределенных факторов, включая немоделируемые ускорения и разброс значений коэффициентов геопотенциала Земли, а также синтез алгоритма автономной навигации с учетом ошибок работы бортовой цифровой вычислительной машины (БЦВМ).

На решении конкретных технических задач оптимизации работы наземных измерительных пунктов и бортовых измерительных средств демонстрируется эффективность и работоспособность развитой в книге теории оптимизации работы навигационных средств. Показано, что построение оптимальных планов навигации является существенным резервом повышения точности определения орбит ИСЗ.

Главы 5 и 9 написаны с использованием результатов, полученных совместно с В. И. Карловым. Авторы признательны А. И. Звереву, А. В. Федорову, С. И. Радоманову, А. П. Камышанову, С. И. Тихонову за помощь, оказанную при подготовке книги.

ЧАСТЬ I

ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ И НАВИГАЦИИ ИСЗ

Глава 1

НЕВОЗМУЩЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ИСЗ

1.1. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Введем системы координат, которые будут использоваться в дальнейшем при описании движения ИСЗ. При этом будем следовать в основном работам [8, 10, 31, 36].

1. Геоцентрическая экваториальная система координат (ГЭСК). Различают прямоугольную (XYZ) и сферическую ($r\alpha\delta$) ГЭСК. Начала обеих систем расположены в центре масс Земли. Основная ось каждой из систем координат расположена в экваториальной плоскости Земли и направлена в точку весеннего равноденствия γ (рис. 1.1).

У прямоугольной ГЭСК ось Z направлена на Северный полюс мира, ось Y дополняет систему до правой. Положение спутника в прямоугольной ГЭСК определяется координатами x, y, z , которые выражаются через соответствующие сферические координаты r, α, δ сферической ГЭСК зависимостями

$$\begin{aligned}x &= r \cos \delta \cos \alpha, \\y &= r \cos \delta \sin \alpha, \\z &= r \sin \delta,\end{aligned}\tag{1.1}$$

где r — расстояние от начала ГЭСК до спутника ($r > 0$); α — угол прямого восхождения, измеряемый в плоскости экватора от основной оси (против движения часовой стрелки, если смотреть со стороны Северного полюса мира) до линии пересечения плоскости экватора с перпендикулярной ему плоскостью небесного меридиана, в которой находится спутник ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$); δ — угол склонения, определяемый как угол между плоскостью экватора и направлением на спутник из начала системы координат ($0 \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$ в северном полушарии и $-\frac{\pi}{2} \leq \delta < 0$ в южном полушарии).

Сферические координаты ИСЗ в ГЭСК могут быть вычислены через прямоугольные по следующим формулам:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\delta = \arcsin \frac{z}{r}, \quad (1.2)$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{y}{x},$$

причем $\alpha = \tilde{\alpha}$, если $x \geq 0, y \geq 0$;
 $\alpha = \pi - \tilde{\alpha}$, если $x < 0, y \geq 0$;
 $\alpha = \pi + \tilde{\alpha}$, если $x < 0, y < 0$,
 $\alpha = 2\pi - \tilde{\alpha}$, если $x \geq 0, y < 0$,

$$(1.3)$$

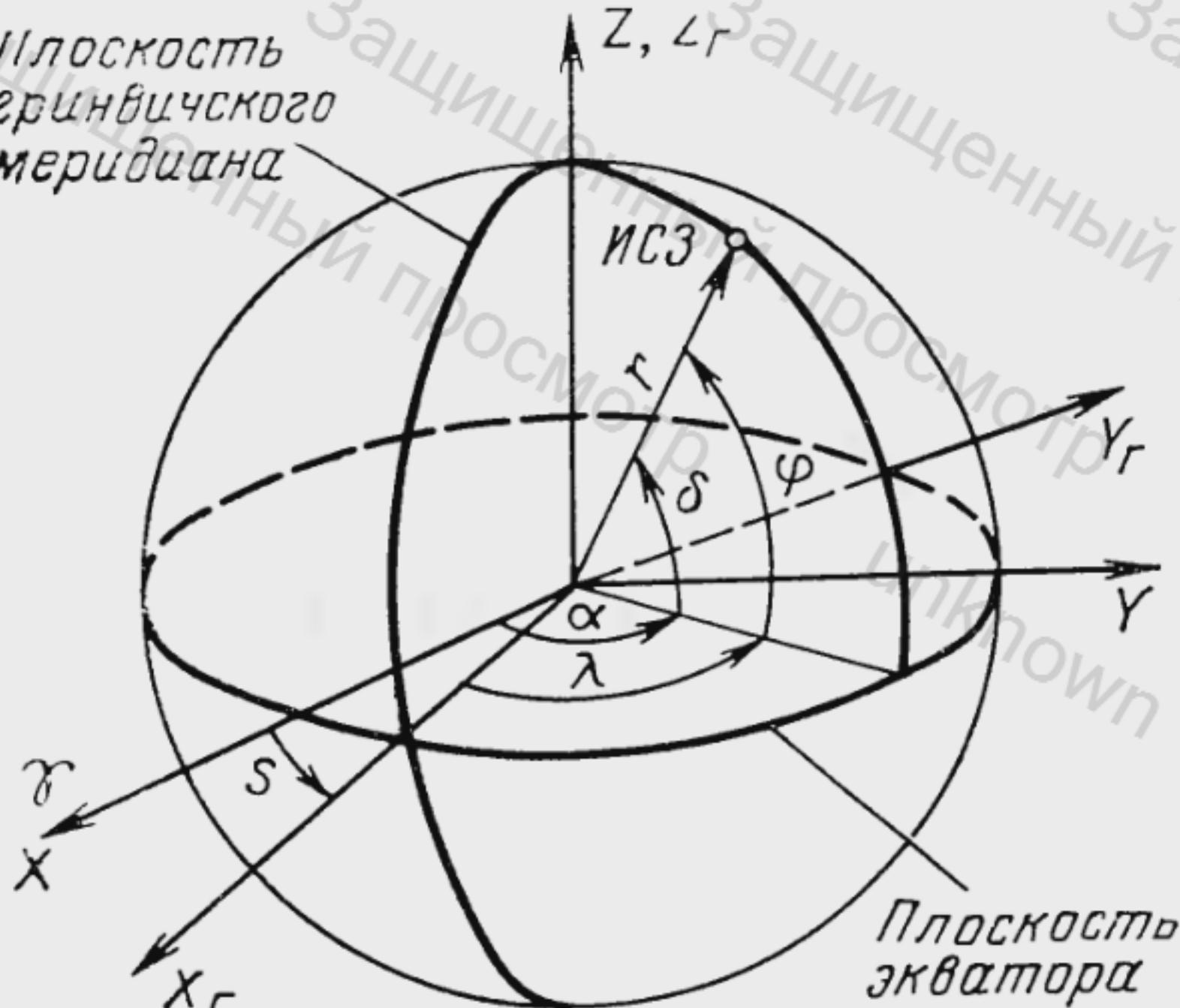


Рис. 1.1. Геоцентрическая экваториальная и географическая системы координат

При практических расчетах ГЭСК с высокой степенью точности можно считать инерциальной.

2. Географическая (гринвичская) система координат (ГСК). Будем также различать прямоугольную ($X_gY_gZ_g$) и сферическую ($r\phi\lambda$) ГСК. Начала обеих систем расположены в центре масс Земли. Основная ось каждой системы координат расположена в экваториальной плоскости Земли и проходит через гринвичский меридиан.

Ось Z_g прямоугольной ГСК направлена на Северный полюс мира, ось Y_g дополняет систему до правой. Положение спутника в прямоугольной ГСК определяется координатами x_g, y_g, z_g , которые выражаются через соответствующие сферические координаты r, ϕ, λ сферической ГСК (см. рис. 1.1) зависимостями

$$\begin{aligned} x_g &= r \cos \phi \cos \lambda, \\ y_g &= r \cos \phi \sin \lambda, \\ z_g &= r \sin \phi, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где ϕ — геоцентрическая широта, измеряемая в плоскости географического меридиана между плоскостью экватора и направлением из начала системы координат на спутник ($0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ при $z_g \geq 0$ и $-\frac{\pi}{2} \leq \phi < 0$ при $z_g < 0$); λ — гринвичская долгота, измеряемая в экваториальной плоскости от основной оси (против часовой стрелки, если смотреть с Северного полюса мира) до линии пересечения плоскости экватора с перпендикулярной ему плоскостью географического меридиана, в которой находится спутник ($0 \leq \lambda \leq 2\pi$).

Сферические координаты спутника в ГСК могут быть вычислены через прямоугольные по следующим формулам:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x_r^2 + y_r^2 + z_r^2}, \\ \varphi &= \arcsin \frac{z_r}{r}, \\ \lambda &= \operatorname{arctg} \frac{y_r}{x_r}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

причем величина угла λ вычисляется по формулам (1.3), в которых вместо a , \tilde{a} , x , y следует положить соответственно λ , $\tilde{\lambda}$, x_r , y_r .

3. Топоцентрическая система координат (ТСК). Начала прямоугольной ($X_{\text{тп}}Y_{\text{тп}}Z_{\text{тп}}$) и сферической ($D\gamma A$) ТСК расположены на поверхности Земли в пункте связи или измерения. Основная ось каждой системы координат лежит в плоскости местного горизонта и направлена на юг.

Ось $Z_{\text{тп}}$ прямоугольной ТСК направлена по нормали к плоскости местного горизонта от Земли, ось $Y_{\text{тп}}$ дополняет систему до правой. Положение спутника в прямоугольной ТСК определяется координатами $x_{\text{тп}}$, $y_{\text{тп}}$, $z_{\text{тп}}$, которые выражаются через соответствующие сферические координаты D , γ , A сферической ТСК (рис. 1.2) зависимостями

$$\begin{aligned} x_{\text{тп}} &= -D \cos \gamma \cos A, \\ y_{\text{тп}} &= D \cos \gamma \sin A, \\ z_{\text{тп}} &= D \sin \gamma, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где D — наклонная дальность, т. е. расстояние от начала ТСК до спутника ($D > 0$); γ — угол места, измеряемый между плоскостью местного горизонта и вектором наклонной дальности ($0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2}$ при $z_{\text{тп}} \geq 0$ и $-\frac{\pi}{2} \leq \gamma < 0$ при $z_{\text{тп}} < 0$); A — угол азимута, измеряемый в плоскости местного горизонта от направления на север (по движению часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления оси $Z_{\text{тп}}$) до проекции вектора наклонной дальности на плоскость местного горизонта ($0 \leq A \leq 2\pi$).

Сферические координаты спутника в ТСК могут быть вычислены через прямоугольные по следующим формулам:

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{x_{\text{тп}}^2 + y_{\text{тп}}^2 + z_{\text{тп}}^2}, \\ \gamma &= \arcsin \frac{z_{\text{тп}}}{D}, \\ A &= \operatorname{arctg} \left(-\frac{y_{\text{тп}}}{x_{\text{тп}}} \right), \end{aligned} \quad (1.7)$$

причем

$$\begin{aligned} A = \tilde{A}, & \text{ если } x_{\text{тп}} \leq 0, y_{\text{тп}} \geq 0, \\ A = \pi - \tilde{A}, & \text{ если } x_{\text{тп}} > 0, y_{\text{тп}} \leq 0, \\ A = \pi + \tilde{A}, & \text{ если } x_{\text{тп}} > 0, y_{\text{тп}} < 0, \\ A = 2\pi - A, & \text{ если } x_{\text{тп}} \leq 0, y_{\text{тп}} < 0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где $\tilde{A} = \arctg \left| \frac{y_{\text{тп}}}{x_{\text{тп}}} \right|$.

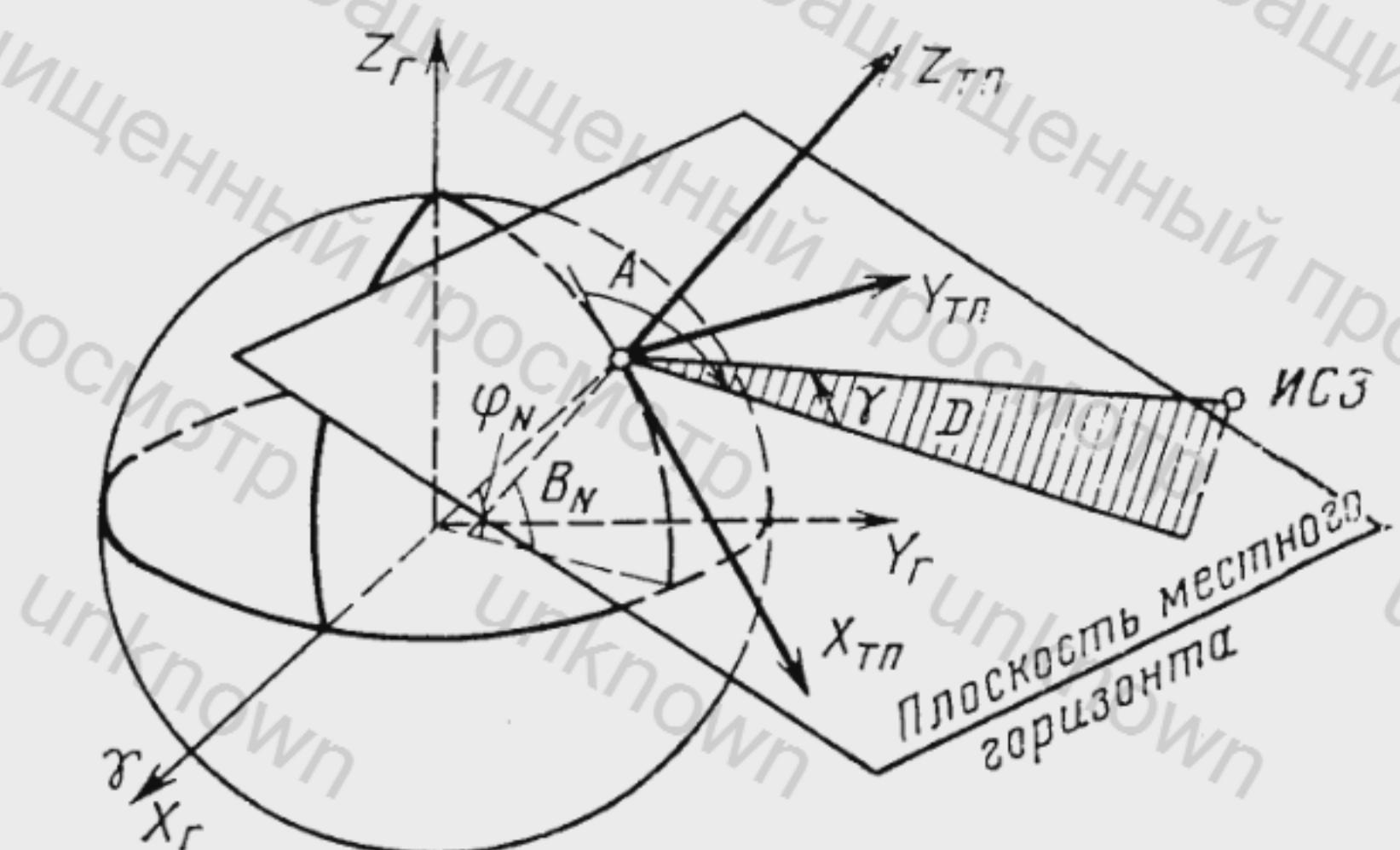


Рис. 1.2. Топоцентрическая система координат

4. Связанная орбитальная система координат (СООСК). Начала прямоугольной ($X_S Y_T Z_W$) и сферической ($l \alpha_0 \beta_0$) СООСК расположены в центре масс спутника. Основная ось каждой системы расположена в плоскости орбиты спутника и направлена по радиусу-вектору ИСЗ R .

Ось Y_T направлена по трансверсали к орбите в сторону орбитального движения спутника, ось Z_W дополняет систему до правой. Положение какой-либо точки M в прямоугольной СООСК определяется координатами x_S , y_T , z_W , которые выражаются через соответствующие сферические координаты l , α_0 , β_0 сферической СООСК (рис. 1.3) зависимостями.

$$\begin{aligned} x_S &= l \cos \alpha_0 \cos \beta_0, \\ y_T &= l \cos \alpha_0 \sin \beta_0, \\ z_W &= l \sin \alpha_0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где l — расстояние от начала СООСК до заданной точки M ($l \geq 0$); α_0 — угол, отсчитываемый от плоскости орбиты до направления «спутник — точка M » ($\alpha_0 \geq 0$ при $z_W \geq 0$, $\alpha_0 < 0$ при $z_W < 0$); β_0 — угол, отсчитываемый в плоскости орбиты от положительного направления оси X_S (против движения часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления оси Z_W) до проекции l на плоскость орбиты ($0 \leq \beta_0 \leq 2\pi$).

Сферические координаты точки M в СООСК могут быть вычислены по следующим формулам:

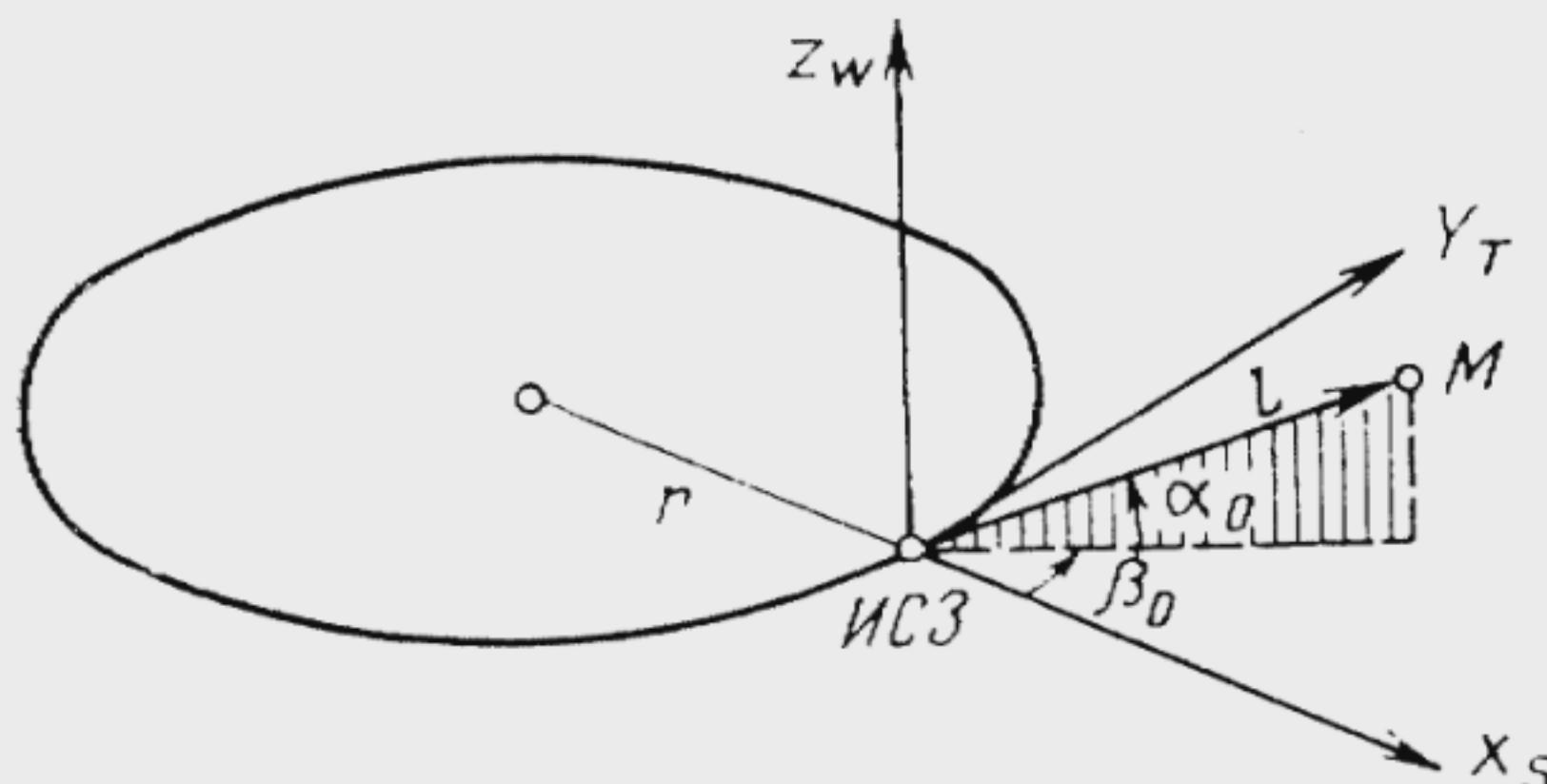


Рис. 1.3. Связанная орбитальная система координат

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{x_S^2 + y_T^2 + z_W^2}, \\ \alpha_0 &= \arcsin \frac{z_W}{l}, \\ \beta_0 &= \arctg \frac{y_T}{x_S}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

причем величина угла β_0 вычисляется по формулам (1.3), в которых вместо a , \dot{a} , x , y следует положить соответственно β_0 , $\dot{\beta}_0$, x_s , y_t .

1.2. ВЕКТОР СОСТОЯНИЯ ИСЗ В РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

Под вектором состояния спутника будем понимать вектор x с шестью независимыми компонентами x_i ($i=1, 6$), полностью определяющими положение центра масс спутника в пространстве, величину и направление его орбитальной скорости в заданный момент времени.

Компоненты вектора x имеют различные числовые и смысловые значения в зависимости от системы координат, в которой рассматривается вектор состояния x . Для определения вектора состояния спутника в различных системах координат используются уравнения преобразования координат и компонент скорости. В общем случае переход от вектора состояния x_1 в одной системе координат к вектору состояния x_2 в другой системе координат, имеющей начало в той же точке, осуществляется с помощью соотношения $x_2 = \mathcal{M}x_1$, где \mathcal{M} — блочная матрица вида

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & I \\ \mathbf{M}^T & \mathbf{M} \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

В (1.11) \mathbf{M} — матрица 3×3 направляющих косинусов второй системы координат относительно первой.

Так, например, векторы состояния ИСЗ в географической системе координат x_g и геоцентрической системе координат x связаны соотношением

$$x = \mathcal{M}_g x_g, \quad (1.12)$$

где \mathcal{M}_g имеет структуру (1.11), а матрица \mathbf{M}_g направляющих косинусов для перехода от географической к геоцентрической системе координат имеет вид

$$\mathbf{M}_g = \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s & 0 \\ \sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

где s — звездное время, т. е. угол, характеризующий положение географической системы координат относительно геоцентрической экваториальной системы координат на заданную эпоху t .

Звездное время определяется по формуле

$$s = s_0 + \omega_3 (t_m - 10800 \text{ с}). \quad (1.14)$$

Здесь s_0 — звездное время на принице в 0^h гринвичского (всемирного) времени на дату \mathcal{D} эпохи t . Эта величина приводится на каждый день года в Астрономических ежегодниках (АЕ); ω_3 — угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси ($\omega_3 = 7,2921157 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$); t_m — московское время, к которому отнесены координаты x_r , y_r , z_r , связано с гринвичским временем t_r соотношением

$$t_m = t_r + 10800 \text{ с.}$$

Обратный переход осуществляется с помощью матрицы \mathcal{M}^{t_r} . При этом матрица \mathcal{M}^{t_r} обратного перехода имеет структуру, идентичную (1.11).

Переход от вектора состояния ИСЗ x_{tp} в топоцентрической системе координат к вектору состояния x_r ИСЗ в географической системе координат (начала этих систем координат не совпадают) определяется соотношениями

$$x_r = \bar{x}_{rN} + \mathcal{M}_{tp} x_{tp}, \quad (1.15)$$

где

$$\mathcal{M}_{tp} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{tp} & | & 0 \\ \hline & | & | \\ & \mathbf{M}_{tp} & | & \mathbf{M}_p \end{pmatrix}, \quad (1.16)$$

$$\bar{x}_{rN} = \begin{pmatrix} x_{rN} \\ y_{rN} \\ z_{rN} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

В (1.16)

$$\mathbf{M}_{tp} = \begin{pmatrix} \sin B_N \cos L_N & -\sin L_N & \cos B_N \cos L_N \\ \sin B_N \sin L_N & \cos L_N & \cos B_N \sin L_N \\ -\cos B_N & 0 & \sin B_N \end{pmatrix}.$$

В (1.17) x_{rN} , y_{rN} , z_{rN} — географические координаты пункта, определяемые по формулам:

$$\begin{aligned} x_{rN} &= \left(\frac{R_\vartheta}{A_N} + H_N \right) \cos B_N \cos L_N, \\ y_{rN} &= \left(\frac{R_\vartheta}{A_N} + H_N \right) \cos B_N \sin L_N, \\ z_{rN} &= \left[\frac{R_\vartheta (1 - \alpha_\vartheta)^2}{A_N} + H_N \right] \sin B_N. \end{aligned} \quad (1.18)$$

В (1.18) $A_N = \sqrt{1 - \alpha_e(2 - \alpha_e)} \sin^2 B_N$; R_e — экваториальный радиус Земли, равный 6378,137 км; B_N , L_N — геодезическая широта и гринвичская долгота пункта; геодезическая B_N и геоцентрическая φ_N широты пункта связаны соотношением $\tan \varphi_N = (1 - \alpha_e)^2 \tan B_N$; α_e — сжатие референц-эллипсоида, равное $(1 : 298,25)$; H_N — высота пункта над поверхностью референц-эллипсоида. Обратный переход осуществляется с помощью соотношений

$$x_{\text{тп}} = \begin{pmatrix} M_{\text{тп}}^T & | & 0 \\ \hline \dot{M}_{\text{тп}}^T & | & \dots \\ \ddot{M}_{\text{тп}}^T & | & M_{\text{тп}}^T \end{pmatrix} x_{\Gamma} - \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{\text{тп}}^T \\ \ddot{\mathcal{M}}_{\text{тп}}^T \end{pmatrix} \bar{x}_{\Gamma N}. \quad (1.19)$$

Переход от вектора состояния ИСЗ в связанный орбитальной системе координат x_c к вектору состояния x в геоцентрической экваториальной системе осуществляется через соотношение $x =$

$$= \bar{x} + \mathcal{M}_c x_c, \quad \text{где } \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_c \text{ имеет структуру (1.11), а } M_c: \\ M_c = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

где $\alpha_{11} = \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i$,

$\alpha_{12} = -\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i$,

$\alpha_{13} = \sin \Omega \sin i$,

$\alpha_{21} = \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i$,

$\alpha_{22} = -\sin u \sin \Omega +$

$+ \cos u \cos \Omega \cos i$,

$\alpha_{23} = -\cos \Omega \sin i$,

$\alpha_{31} = \sin u \sin i$,

$\alpha_{32} = \cos u \sin i$,

$\alpha_{33} = \cos i$,

(u — аргумент широты ИСЗ; Ω — долгота восходящего узла; i — наклонение орбиты (рис. 1.4)).

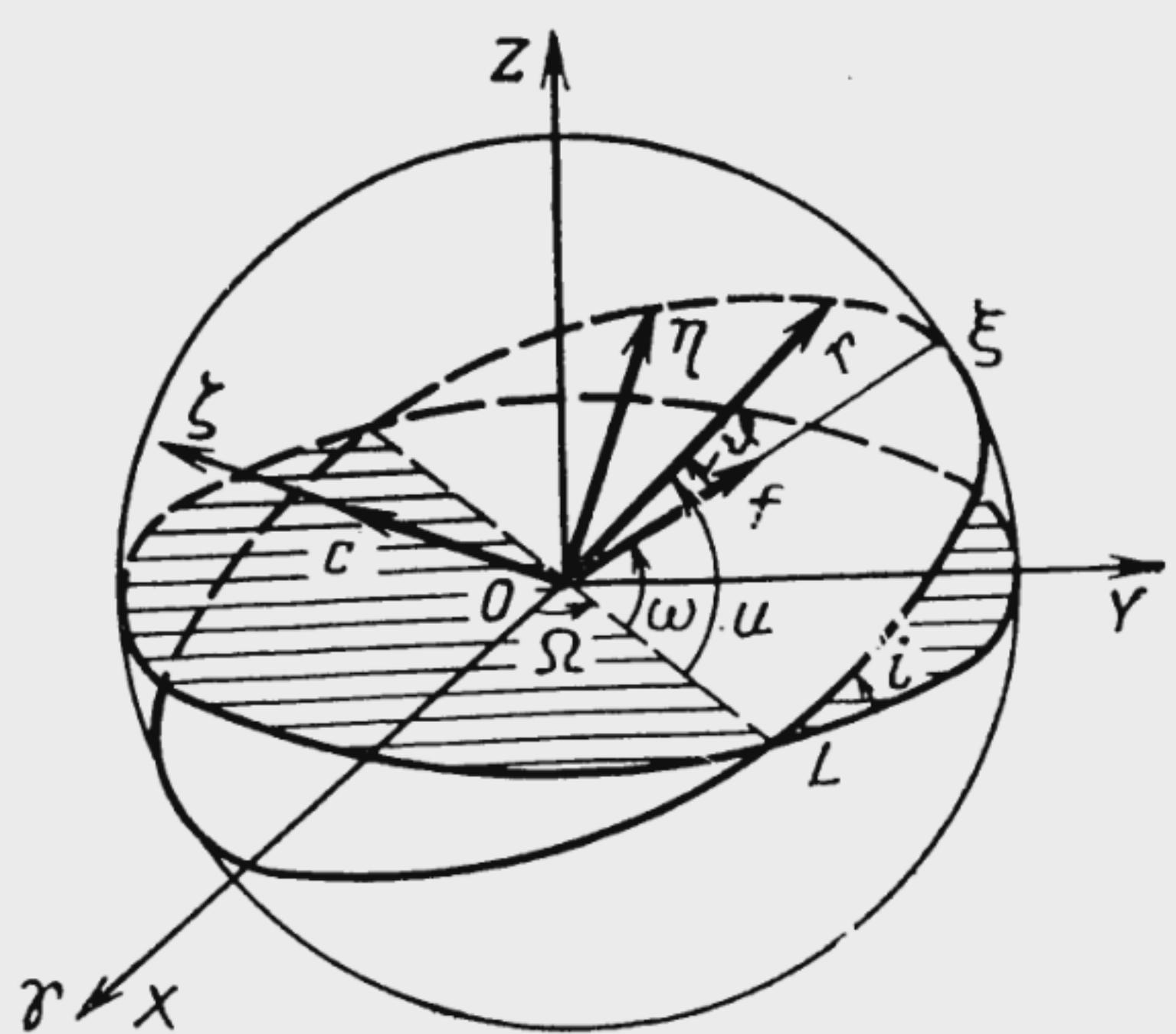


Рис. 1.4. Эйлеровы углы Ω , ω , i

1.3. УРАВНЕНИЯ НЕВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ИСЗ

Как уже отмечалось, под невозмущенным движением ИСЗ понимается движение при условии, что единственной силой, действующей на него, является сила притяжения Земли, рассматриваемой как шар с концентрическим распределением плотности. В этом случае Земля и спутник могут рассматриваться как две материальные точки, взаимно притягивающиеся по закону Ньютона.

Векторное дифференциальное уравнение невозмущенного движения в геоцентрической экваториальной системе координат имеет вид

$$\ddot{\mathcal{R}} + \mu \frac{\mathcal{R}}{r^3} = 0, \quad (1.21)$$

где \mathcal{R} — радиус-вектор, направленный из центра Земли на спутник; μ — гравитационный параметр Земли.

Согласно (1.21) на спутник действует ускорение ньютоновской силы тяготения, величина которого равна $g = \mu/r^2$. Этому ускорению соответствует силовая функция ньютоновского центрального поля сил

$$U = -\frac{\mu}{r}. \quad (1.22)$$

Компоненты ускорения g по осям x, y, z геоцентрической экваториальной системы координат будут равны

$$g_{q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} = -\frac{\mu q_i}{r^3}$$

$$(q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z).$$

Это значит, что векторное уравнение (1.21) равносильно трем скалярным уравнениям для декартовых координат спутника:

$$\ddot{q}_i + \frac{\mu q_i}{r^3} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.23)$$

Примечательной особенностью дифференциальных уравнений невозмущенного движения является то, что они легко интегрируются в элементарных функциях [2, 10, 29, 36, 40].

Рассмотрим их первые интегралы.

1. Векторный интеграл площадей. Умножая (1.21) векторно на \mathcal{R} и интегрируя, получим первый интеграл:

$$\mathcal{R} \times \dot{\mathcal{R}} = c, \quad (1.24)$$

называемый векторным интегралом площадей. Здесь через c обозначен постоянный вектор площадей с компонентами $c_1, c_2,$

Заданный просмотр *Заданный просмотр* *Заданный просмотр* *Заданный просмотр* *Заданный просмотр*

Из (1.24) связь между c_1 , c_2 , c_3 и кинематическими параметрами представляется в виде

$$\begin{aligned} y\dot{z} - z\dot{y} &= c_1, \\ z\dot{x} - x\dot{z} &= c_2, \\ x\dot{y} - y\dot{x} &= c_3. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Умножив уравнения (1.25) соответственно на x , y , z и сложив их, получим уравнение плоскости

$$c_1x + c_2y + c_3z = 0,$$

которое свидетельствует о том, что движение спутника под действием ньютоновской силы происходит в неподвижной плоскости, проходящей через притягивающий центр и перпендикулярной вектору \vec{c} .

2. Интеграл энергии. Умножая уравнение (1.21) скалярно на $2\vec{R}$, после преобразования получим еще один первый интеграл

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} + h = 2U + h, \tag{1.26}$$

называемый интегралом энергии. Здесь V — скорость движения спутника по орбите; h — постоянная энергии.

3. Векторный интеграл Лапласа. Используя (1.21) и (1.24), найдем

$$\frac{d}{dt} (c \times \vec{R}) + \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{R}}{r} \right) = 0,$$

откуда после интегрирования получим векторный интеграл Лапласа

$$c \times \dot{\vec{R}} + \mu \frac{\vec{R}}{r} = -\vec{f}, \tag{1.27}$$

где \vec{f} — постоянный вектор Лапласа с компонентами f_1 , f_2 , f_3 .

Векторное уравнение (1.27) равносильно трем скалярным уравнениям:

$$\begin{aligned} -\mu \frac{x}{r} + c_3 \dot{y} - c_2 \dot{z} &= f_1, \\ -\mu \frac{y}{r} + c_1 \dot{z} - c_3 \dot{x} &= f_2, \\ -\mu \frac{z}{r} + c_2 \dot{x} - c_1 \dot{y} &= f_3. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Между приведенными семью интегралами c_1 , c_2 , c_3 , h , f_1 , f_2 , f_3 существуют два тождественных соотношения:

$$\vec{f} \cdot \vec{c} = 0, \quad |\vec{f}|^2 = \mu^2 + h|\vec{c}|^2. \tag{1.29}$$

Первое соотношение выражает условие перпендикулярности векторов c и f , второе — связывает модули этих векторов с полной энергией.

Таким образом, из семи рассмотренных интегралов только пять являются независимыми. Последний недостающий интеграл может быть найден простой квадратурой, если, например, кинематический параметр \dot{x} выразить через x и постоянные $c_1, c_2, c_3, h, f_1, f_2, f_3$, а затем проинтегрировать полученное уравнение. В результате найдем шестую независимую постоянную τ , определяющую время прохождения спутником некоторой вполне определенной точки на орбите.

Определяя затем кинематические параметры как функции независимой переменной t и найденных постоянных, найдем окончательно систему

$$\begin{aligned} q_i &= \varphi_i(t, c_1, c_2, c_3, h, f_1, f_2, f_3, \tau), \\ \dot{q}_i &= \psi_i(t, c_1, c_2, c_3, h, f_1, f_2, f_3, \tau), \end{aligned} \quad (1.30)$$

определяющую общее решение дифференциальных уравнений невозмущенного движения (1.21). При этом первые три уравнения для x, y, z определяют траекторию (орбиту) спутника и его координаты для любого момента времени, а последние три уравнения для $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ определяют составляющие и величину орбитальной скорости спутника. Произвольные постоянные, входящие в формулы общего интеграла, могут быть однозначно определены по (1.25), (1.26) и (1.28) через начальные значения функции $q_i(t_0)$ и $\dot{q}_i(t_0)$, которые обычно задаются в качестве исходных данных. Следует отметить, что для контроля правильности вычисления произвольных постоянных можно использовать тождественные соотношения (1.29), в которых знак строгого равенства заменяется на знак приближенного равенства из-за округления при вычислении величин $c_1, c_2, c_3, h, f_1, f_2, f_3$. Кроме того, полезно помнить, что согласно (1.29), модули векторов c и f или модуль вектора f и постоянная энергии h одновременно не могут быть равны нулю (поскольку всегда $\mu > 0$).

1.4. ЭЛЕМЕНТЫ ОРБИТЫ

Для проведения исследований и решения ряда практических задач часто используется иная форма общего решения, чем (1.30), содержащая так называемые элементы орбиты.

Векторные интегралы площадей (1.24) и Лапласа (1.27) позволяют получить уравнение орбиты спутника в полярных координатах.

Умножая обе части интеграла Лапласа скалярно на вектор \mathcal{R} и используя интеграл площадей (1.24), найдем

$$r = \frac{|c|^2}{\mu \left(1 + \frac{|f|}{\mu} \cos \vartheta \right)} , \quad (1.31)$$

где ϑ — угол между векторами f и \mathcal{R} .

Выражение (1.31) представляет собой полярное уравнение кривой второго порядка, являющейся орбитой спутника: полюс кривой находится в ее фокусе, совпадающем с центром масс Земли.

Вводя обозначения

$$p = \frac{|c|^2}{\mu}, \quad e = \frac{|f|}{\mu}, \quad (1.32)$$

уравнение (1.31) можно представить в виде

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}, \quad (1.33)$$

где ϑ — истинная аномалия (угол, отсчитываемый от вектора f до вектора \mathcal{R} по направлению орбитального движения спутника); p — фокальный параметр орбиты; e — эксцентриситет орбиты (рис. 1.5).

Как следует из (1.33), форма орбиты определяется эксцентриситетом. При $e=0$ движение спутника происходит по круговой орбите. При $0 < e < 1$ орбита спутника является эллипсом. Значению $\vartheta=0$ соответствует расстояние до перигея r_p — наименьшее удаление спутника от центра масс Земли

$$r_p = \frac{p}{1 + e}, \quad (1.34)$$

а значению $\vartheta=\pi$ — расстояние до апогея r_a — наибольшее удаление спутника от центра масс Земли

$$r_a = \frac{p}{1 - e}. \quad (1.35)$$

Линия, соединяющая апогей с перигеем, называется линией апсид. Наибольший размер эллипса характеризуется его большой полуосью a , при этом

$$a = \frac{r_a + r_p}{2}, \quad (1.36)$$

$$a = \frac{p}{1 - e^2}. \quad (1.37)$$

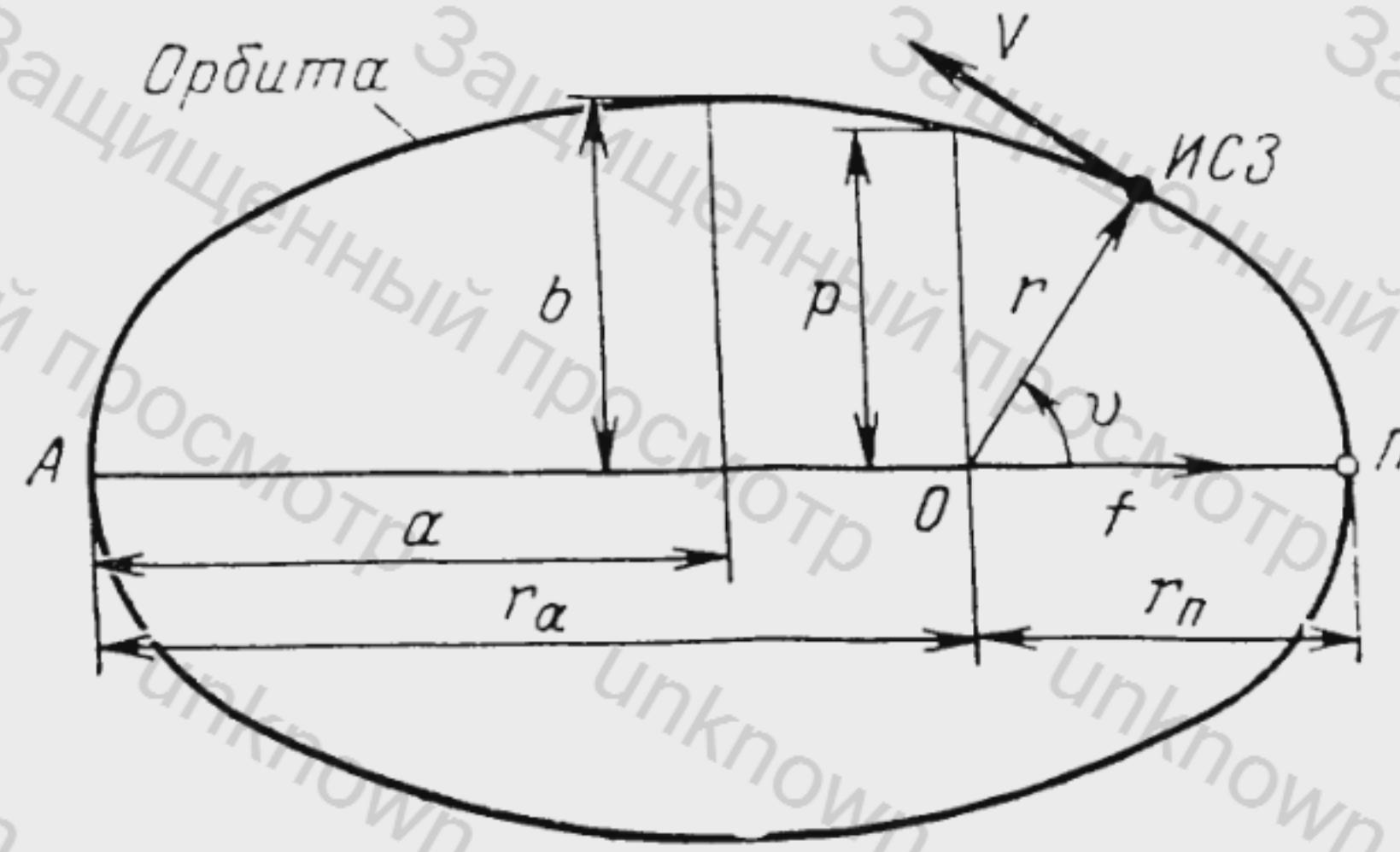


Рис. 1.5. Элементы орбиты

Малая полуось орбиты определяется соотношением

$$b = \sqrt{r_a r_p} = a \sqrt{1 - e^2}. \quad (1.38)$$

Связь между истинной аномалией и временем устанавливается интегралом площадей в плоскости орбиты в полярных координатах

$$r^2 \dot{\vartheta} = |c|. \quad (1.39)$$

Из (1.39) с учетом (1.33) имеем

$$\int_0^\vartheta \frac{d\vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^2} = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} (t - \tau_p), \quad (1.40)$$

где τ_p — момент прохождения спутника через перигей орбиты.

Для решения этого уравнения вместо ϑ удобно ввести новую переменную E , называемую эксцентрической аномалией, посредством подстановки

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}, \quad (1.41)$$

при которой

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (1.42)$$

Производя замену переменных в (1.40), получим уравнение Кеплера, связывающее эксцентрическую аномалию E с временем t

$$E - e \sin E = M, \quad (1.43)$$

где $M = n(t - \tau_p)$; $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$; M — средняя аномалия; n —

среднее движение (средняя угловая скорость движения спутника по орбите).

Применяя уравнение Кеплера на интервале (по E) от 0 до 2π , найдем период обращения спутника по орбите

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}. \quad (1.44)$$

Уравнение Кеплера (1.43) имеет единственное действительное решение [2]. Существует много способов приближенного решения этого уравнения. Одним из них является метод последовательных приближений, который сводится к проведению вычислений по следующей схеме:

$$E_{k+1} = M + e \sin E_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

В нулевом приближении ($k=0$) полагают $E_0 = M$. Процесс приближения абсолютно сходится при всех значениях $e < 1$.

Если эксцентриситет орбиты мал настолько, что его квадрат можно пренебречь, то для вычисления эксцентрической аномалии по заданному значению средней аномалии достаточно воспользоваться только первым приближением.

Выражение для скорости, как следует из (1.26), (1.29), (1.32), (1.37), имеет вид

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a} \quad (1.45)$$

или с учетом (1.33), (1.37)

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{p} (1 + e^2 + 2e \cos \vartheta)}. \quad (1.46)$$

Отсюда

$$V_{\text{п}} = \sqrt{\frac{\mu}{p} (1 + e)}, \quad V_{\text{a}} = \sqrt{\frac{\mu}{p} (1 - e)}. \quad (1.47)$$

Радиальная и трансверсальная проекции скорости соответственно равны

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta, \quad (1.48)$$

$$V_t = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \vartheta). \quad (1.49)$$

Угол, образуемый скоростью с радиусом-вектором, определяется формулой

$$\cos \delta^* = \frac{e \sin \vartheta}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \vartheta}}. \quad (1.50)$$

Приведенные выше формулы описывают основные закономерности кеплеровского эллиптического движения в плоскости орбиты. Чтобы полностью определить движение в пространстве, необходимо знать пространственное расположение орбиты. Положение орбиты в геоцентрической экваториальной системе координат XYZ фиксируется с помощью трех эйлеровых углов Ω, ω, i (см. рис. 1.4).

Плоскость орбиты спутника пересекается в общем случае с плоскостью экватора Земли. Линия пересечения этих плоскостей называется линией узлов, а две ее точки, принадлежащие орбите, называются узлами орбиты. Узел орбиты, в котором спутник пересекает экватор, при движении из южного полушария в северное, называется восходящим узлом; противоположный узел — нисходящим.

Положение восходящего узла в системе координат XYZ определяется углом между направлениями из центра Земли на точку весеннего равноденствия и на восходящий узел, отсчитываемым против часовой стрелки, если смотреть со стороны Северного полюса. Этот угол обозначается Ω и называется долготой восходящего узла, причем $0 \leq \Omega \leq 2\pi$.

Угол между экваториальной плоскостью и плоскостью орбиты i называется наклонением орбиты. Наклонение отсчитывается от экваториальной плоскости против часовой стрелки, если смотреть со стороны восходящего узла.

Если $0 \leq i \leq \pi/2$, то движение называется прямым, если $\pi/2 < i \leq \pi$ — обратным. При $i = 0$, π орбита называется экваториальной, а при $i = \pi/2$ — полярной.

Углы Ω и i определяют положение плоскости орбиты в пространстве. Положение орбиты в плоскости определяется аргументом широты перигея ω — угловым расстоянием перигея орбиты, отсчитываемым в плоскости орбиты от направления из центра Земли на восходящий узел в сторону движения спутника. Угол ω изменяется в диапазоне от 0 до 2π . Часто вместо истинной аномалии ϑ вводят в рассмотрение другую переменную

$$u = \omega + \vartheta, \quad (1.51)$$

называемую аргументом широты спутника. Переменная u есть угол, отсчитываемый в плоскости орбиты от направления из центра Земли на восходящий узел до текущего радиуса-вектора спутника в направлении его движения по орбите.

Эйлеровы углы Ω , ω , i связаны с первыми интегралами c_1 , c_2 , c_3 , f_1 , f_2 , f_3 соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{c_1}{|c|} &= \sin i \sin \Omega, \\ \frac{c_2}{|c|} &= -\sin i \cos \Omega, \\ \frac{c_3}{|c|} &= \cos i; \end{aligned} \quad (1.52)$$

$$\begin{aligned} \frac{f_1}{|f|} &= \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i, \\ \frac{f_2}{|f|} &= \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i, \\ \frac{f_3}{|f|} &= \sin \omega \sin i, \end{aligned} \quad (1.53)$$

которые позволяют однозначно определить параметры Ω , ω , i . Найдем сначала значение долготы восходящего узла орбиты.

Из первых двух формул системы (1.52) имеем

$$\begin{aligned}\Omega = \tilde{\Omega} &= \arctg \left| \frac{c_1}{c_2} \right|, \quad \text{если } c_1 \geq 0, \quad c_2 \leq 0, \\ \Omega &= \pi - \tilde{\Omega}, \quad \text{если } c_1 \geq 0, \quad c_2 > 0, \\ \Omega &= \pi + \tilde{\Omega}, \quad \text{если } c_1 < 0, \quad c_2 \geq 0, \\ \Omega &= 2\pi - \tilde{\Omega}, \quad \text{если } c_1 < 0, \quad c_2 < 0.\end{aligned}\tag{1.54}$$

Из третьей формулы системы (1.52) определим наклонение орбиты

$$i = \tilde{i} = \arccos \left| \frac{c_3}{c} \right|, \quad \text{если } c_3 \geq 0,\tag{1.55}$$

$$i = \pi - \tilde{i}, \quad \text{если } c_3 < 0.$$

Причем

$$i = 0, \quad \text{если } c_1 = c_2 = 0, \quad c_3 > 0,$$

$$i = \frac{\pi}{2}, \quad \text{если } c_1^2 + c_2^2 \neq 0, \quad c_3 = 0,$$

$$i = \pi, \quad \text{если } c_1 = c_2 = 0, \quad c_3 < 0.$$

Для вычисления аргумента широты перигея воспользуемся следующими формулами, полученными из первого и второго соотношений системы (1.53) при $\cos i \neq 0$:

$$\begin{aligned}\sin \omega &= \frac{-f_1 \sin \Omega + f_2 \cos \Omega}{|f| \cos i}, \\ \cos \omega &= \frac{f_1 \cos \Omega + f_2 \sin \Omega}{|f|}.\end{aligned}\tag{1.56}$$

Так как параметры Ω и i определены, формулы (1.56) позволяют однозначно найти ω . В случае, если $\cos i = 0$, следует использовать вторую и третью формулы системы (1.53), которые дают

$$\cos \omega = \frac{f_2}{|f| \sin \Omega}, \quad \sin \omega = \frac{f_3}{|f|}.\tag{1.57}$$

Таким образом, введены шесть параметров $p, e, \Omega, i, \omega, \tau$, которые с помощью (1.32), (1.40), (1.52), (1.53) связаны с постоянными интегрирования. Параметры $p, e, \Omega, i, \omega, \tau$ называются элементами орбиты.

Зная элементы орбиты, для любого момента времени можно рассчитывать координаты и скорость спутника:

$$\begin{aligned}x &= r (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\ y &= r (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\ z &= r \sin u \sin i;\end{aligned}\tag{1.58}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \frac{x}{r} - r (\sin u \cos \Omega + \cos u \sin \Omega \cos i) \dot{\vartheta}, \\ \dot{y} &= \dot{r} \frac{y}{r} - r (\sin u \sin \Omega - \cos u \cos i) \dot{\vartheta}, \\ \dot{z} &= \dot{r} \frac{z}{r} + r \cos u \sin i \dot{\vartheta}. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Здесь $\dot{\vartheta}$ и \dot{r} вычисляются по формулам (1.39) и (1.48) соответственно.

1.5. ЗАКОНОМЕРНОСТИ ДВИЖЕНИЯ ПО ОКОЛОКРУГОВЫМ ОРБИТАМ

Для околокруговых орбит (которые имеют малую величину эксцентриситета) можно получить зависимости, удобные для проведения качественного анализа и приближенных количественных оценок при управлении движением спутника. Вывод таких зависимостей основан на использовании сходящихся рядов по степеням эксцентриситета e , которые могут быть достаточно просто построены с использованием обобщенной формулы Лагранжа для всех e , не превосходящих предела Лапласа e^* ($e^* \approx 0,6627$) [2, 10, 40, 41].

Принимая за независимую переменную среднюю аномалию M , приведем разложения радиуса r , орбитальной скорости V , истинной аномалии ϑ и $\cos \delta^*$. Причем, учитывая, что для околокруговых орбит $e \ll e^*$, явные выражения для функций r , V , ϑ , $\cos \delta^*$ запишем с точностью до квадрата эксцентриситета включительно

$$r = a \left[1 - e \cos M + \frac{e^2}{2} (1 - \cos 2M) + \dots \right], \quad (1.59)$$

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \left[1 + e \cos M + \frac{1}{4} e^2 (3 \cos 2M - 1) + \dots \right], \quad (1.60)$$

$$\vartheta = M + 2e \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + \dots, \quad (1.61)$$

$$\cos \delta^* = e \sin M - \frac{1}{2} e^2 \sin 2M + \dots. \quad (1.62)$$

Применяя формулы (1.59)–(1.62), рассмотрим некоторые особенности движения спутника по околокруговым орбитам. В частности, покажем, что при движении по околокруговым орбитам значения параметров r , V , $\frac{\pi}{2} - \delta^*$ и разности $(\vartheta - M)$ изменяются в узких диапазонах.

Учитывая, что $e \approx 0$, ограничимся в (1.59)–(1.62) разложением с точностью до первой степени эксцентриситета. Тогда,

согласно (1.59), изменение радиуса r для двух положений спутника на орбите M_1 и M_2 ($M_2 > M_1$) составит величину

$$\Delta r(M_1, M_2) = r(M_2) - r(M_1) \approx ae(\cos M_1 - \cos M_2).$$

Отсюда (так же, как из (1.33) следует, что, во-первых, $\Delta r(M_1, M_2) = 0$ в точках, симметрично расположенных относительно линии апсид, т. е. при $M_2 = 2\pi - M_1$, и, во-вторых, $\max |\Delta r(M_1, M_2)| = 2ae$ соответствует случаю, когда $M_1 = 0$, $M_2 = \pi$ или $M_1 = -\pi$, $M_2 = 2\pi$). Зависимости изменения величины $\Delta r(M_1, M_2)$ на витке при движении спутника от перигея ($M_1 = 0$, $M_2 = M$) суточной ($T = T_{\text{зв}} = 86164$ с) и полусуточной ($T = \frac{T_{\text{зв}}}{2} = 43082$ с)

околокруговых орбит приведены на рис. 1.6.

Используя теперь (1.60), найдем величину изменения орбитальной скорости для двух положений спутника на орбите

$$\Delta V(M_1, M_2) \approx \sqrt{\frac{\mu}{a}} e (\cos M_2 - \cos M_1).$$

Отсюда, так же как и для $\Delta r(M_1, M_2)$, следует, что в точках, симметрично расположенных относительно линии апсид, $\Delta V(M_1, M_2) = 0$ и $\max |\Delta V(M_1, M_2)| = 2 \sqrt{\frac{\mu}{a}} e$ имеет место для апсидальных точек. Зависимости изменения величины $\Delta V(M_1, M_2)$, аналогичные приведенным для $\Delta r(M_1, M_2)$, изображены на рис. 1.7.

Величина разности $(\vartheta - M)$, называемой в астрономии уравнением центра, в первом приближении из (1.61) равна

$$\vartheta - M = 2e \sin M, \quad (1.63)$$

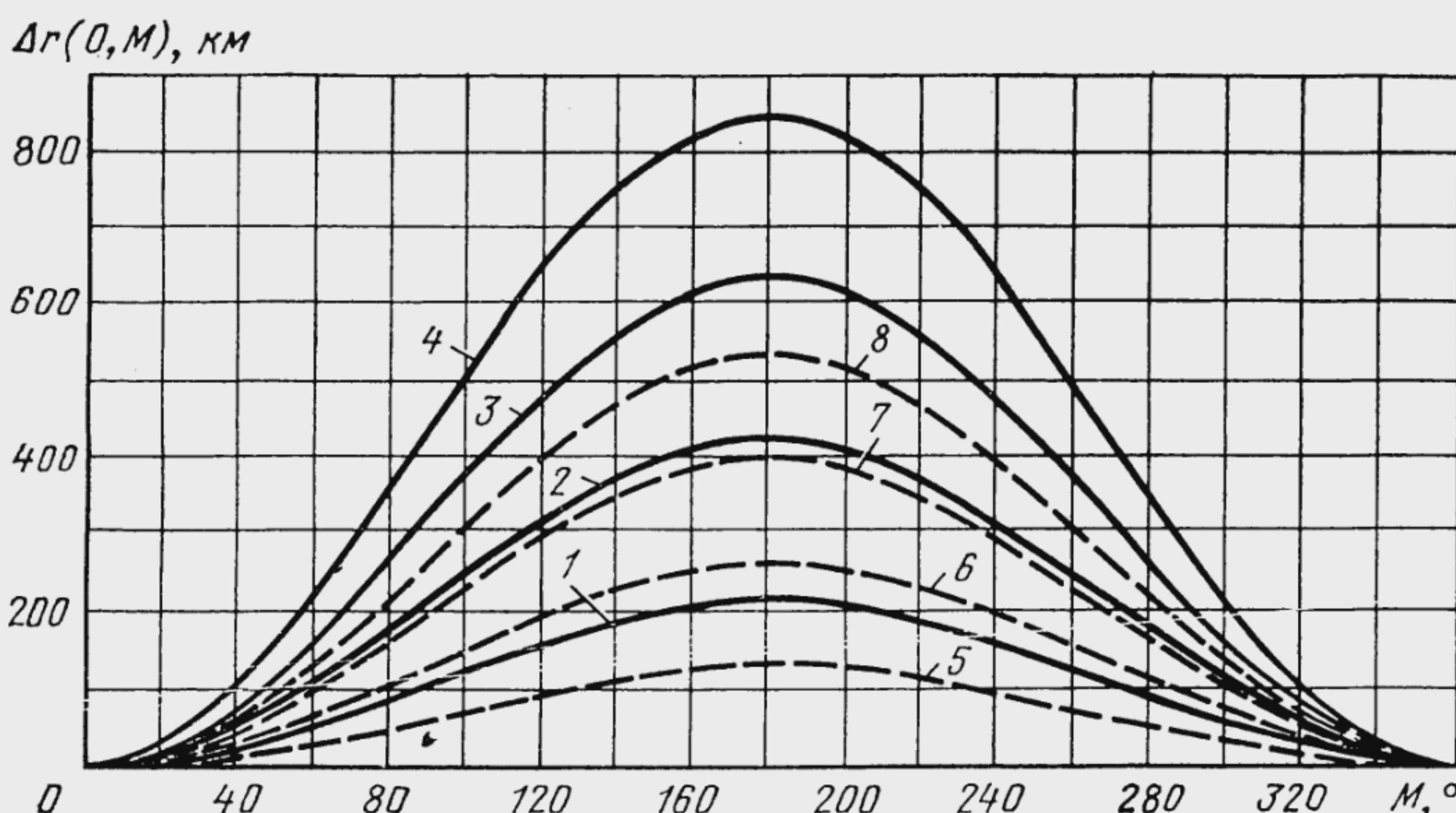


Рис. 1.6. Зависимости величины изменения модуля радиуса-вектора от средней аномалии:

1—4 соответствуют $e = 0,0025 \dots 0,01$ с шагом 0,0025 и $T = 86164$ с; 5—8 соответствуют $e = 0,0025 \dots 0,01$ с шагом 0,0025 и $T = 43082$ с

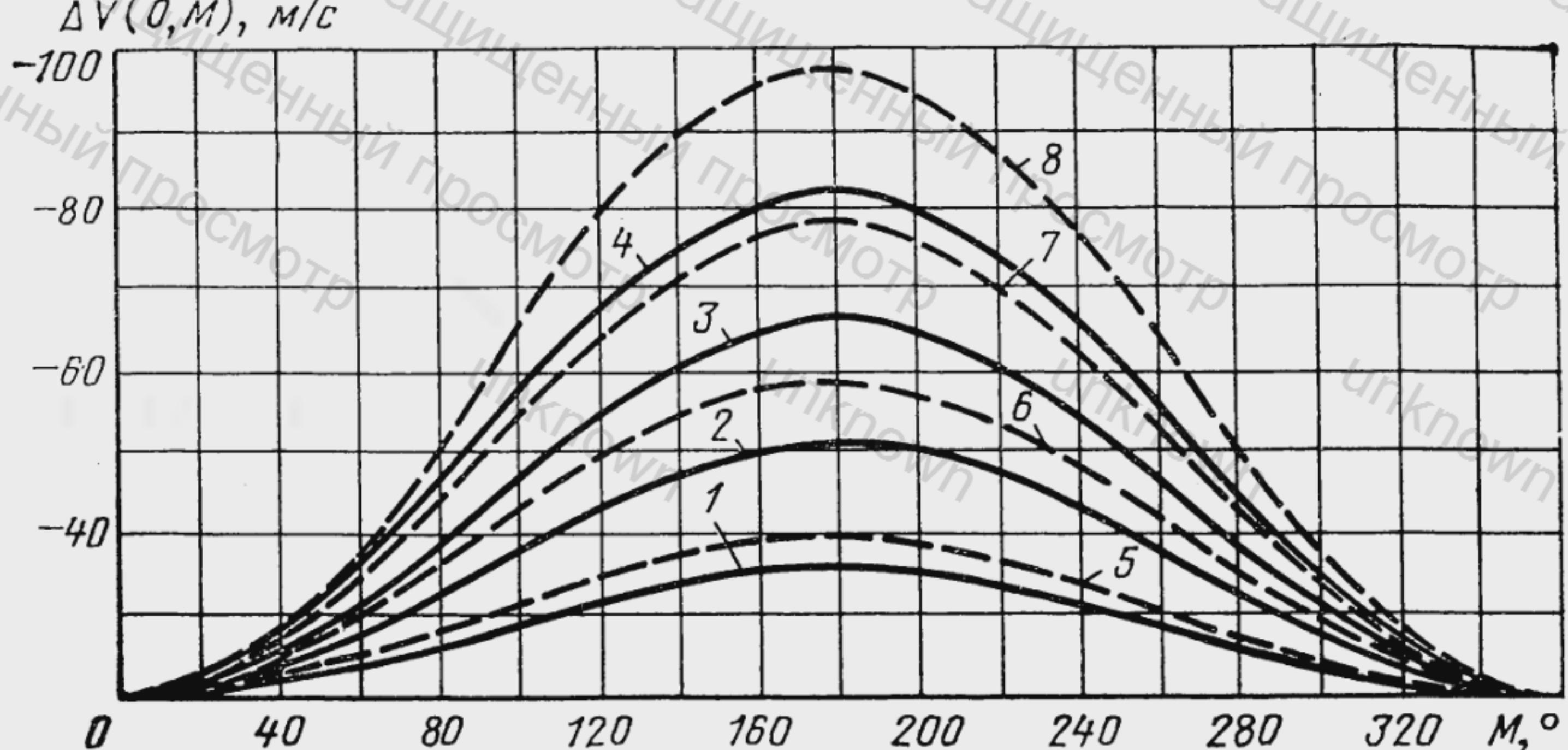


Рис. 1.7. Зависимости величины изменения скорости от средней аномалии:
1—4 соответствуют $e=0,0025 \dots 0,01$ с шагом 0,0025 и $T=86164$ с; 5—8 соответствуют $e=0,0025 \dots 0,01$ с шагом 0,0025 и $T=43082$ с

т. е. максимальное отличие истинной аномалии от средней равно $2e$ и достигается при $M = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

Очевидно, что $\tilde{\Psi} = \frac{\pi}{2} - \delta^*$ является углом между тангенциальным и трансверсальным направлениями, т. е. между вектором скорости и осью Y_T (рис. 1.8). Из (1.62) имеем:

$$\tilde{\Psi} = e \sin M,$$

т. е. вектор скорости совпадает с трансверсалю только в апсидальных точках. При изменении средней аномалии от 0 до π угол $\tilde{\Psi}$ сначала увеличивается, достигая своего наибольшего значения

$$\tilde{\Psi}_{\max} = e$$

при $M = \frac{\pi}{2}$, а затем уменьшается до нуля; при этом угол δ^* всегда меньше $\frac{\pi}{2}$. При изменении средней аномалии от π до 2π

угол $\tilde{\Psi}$ равен по модулю углу $\tilde{\Psi}$, вычисленному при истинной аномалии, равной $2\pi - \vartheta$, при этом, однако, δ^* всегда больше $\frac{\pi}{2}$. Угол $\tilde{\Psi}$ достигает своих экстремальных значений дважды за один оборот спутника вокруг Земли и зависит только от величины эксцентриситета орбиты.

Рассмотренные особенности свойственны любым околокруговым орбитам с произвольными значениями элементов Ω , i и ω . В связи с этим они позволяют получить наглядные качест-

венные картины движения спутника относительно поверхности Земли или относительно некоторого гипотетического спутника, движущегося по строго круговой орбите с номинальным периодом. В качестве примера рассмотрим применение приведенных выше соотношений для анализа движения спутника на стационарной орбите относительно поверхности Земли.

Круговую экваториальную орбиту, при движении по которой вектор угловой орбитальной скорости спутника равен и совпадает с вектором угловой скорости вращения Земли вокруг собственной оси, принято называть стационарной орбитой. Из сказанного следует, что движение спутника по стационарной орбите происходит в восточном направлении, период его обращения равен звездным суткам, а эксцентриситет и наклонение орбиты равны нулю, т. е.

$$T_c = T_{\text{зв}} \approx 86164 \text{ с} (23^h 56^m 04^s), e=0, i=0.$$

Положения перигея и линии узлов в этом случае не определены в связи с тем, что орбита является круговой и ее плоскость совпадает с плоскостью экваториального сечения Земли. Практически перигей и восходящий узел можно рассматривать в любой точке орбиты.

Спутник, движущийся по стационарной орбите, получил название стационарного искусственного спутника Земли (СИСЗ). Спутник на стационарной орбите обладает рядом достоинств, которые являются следствием его «неподвижности» относительно поверхности Земли.

Главное достоинство заключается в возможности непрерывного обслуживания одним СИСЗ более трети земной поверхности, что привело к широкому использованию этой орбиты. Стационарная орбита стала основой для систем спутниковой связи [39, 40].

Из-за отклонений элементов практически реализуемой орбиты от их номинальных значений движение СИСЗ происходит по орбите, несколько отличной от стационарной. Если отклонения элементов невелики, то такая орбита называется квазистационарной.

Спутник на квазистационарной орбите не остается «неподвижным», а смещается относительно поверхности Земли по широте и долготе. Перемещения спутника можно определить, установив связь между географическими координатами спутника, элементами его орбиты и временем.

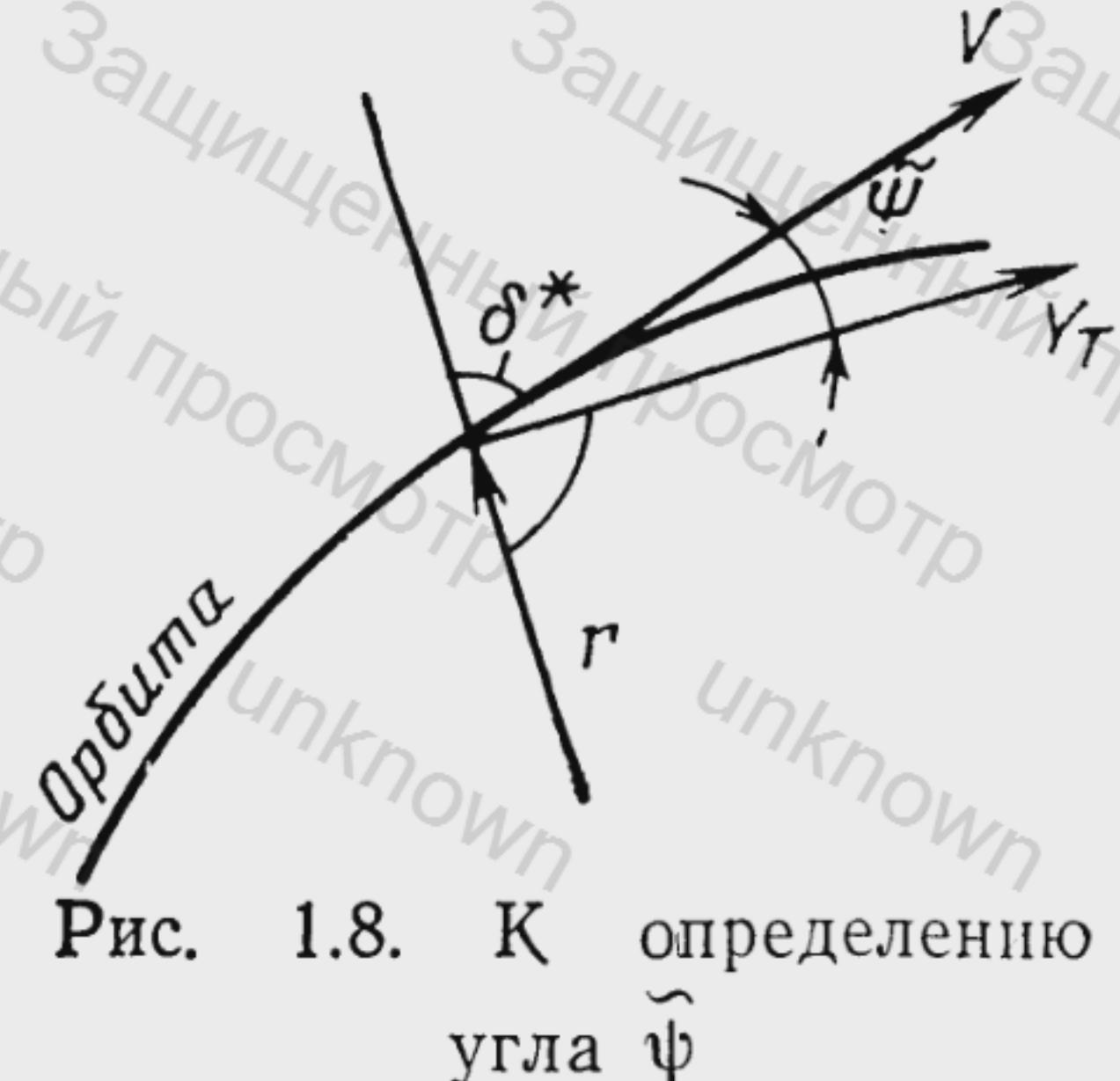


Рис. 1.8. К определению угла $\tilde{\phi}$

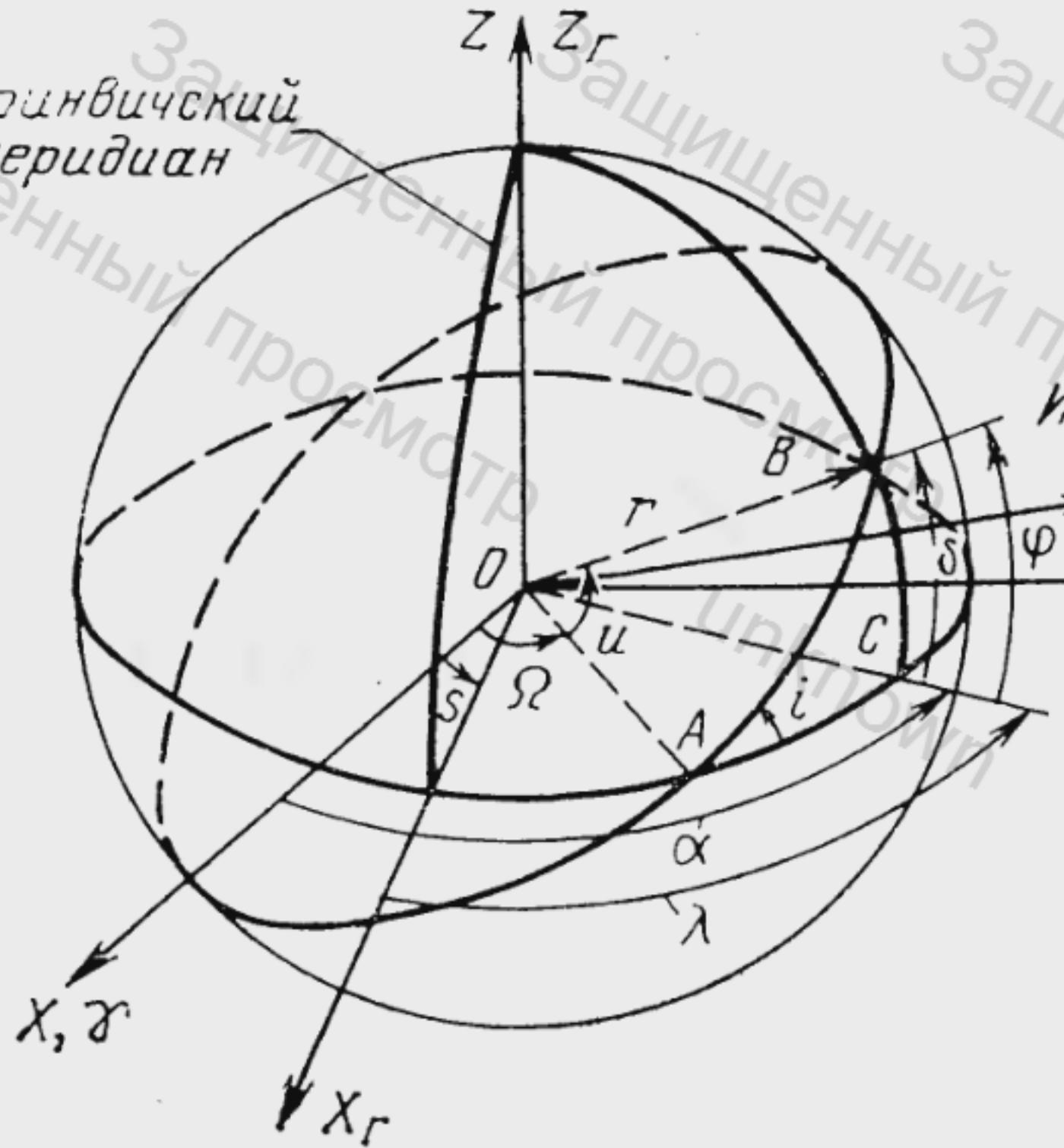


Рис. 1.9. Геоцентрические системы координат

Тогда выражения для геоцентрической широты и гринвичской долготы можно записать

$$\begin{aligned}\varphi &= \arcsin(\sin u \sin i), \\ \lambda &= \Omega - S_0 - \omega_3 t_r + \arctg(\tg u \cos i).\end{aligned}\quad (1.65)$$

Из (1.65) следует, что перемещение спутника по широте всегда ограничено величиной наклонения орбиты.

Если в некоторый начальный момент t_0 известны соответственно гринвичская долгота λ_0 и аргумент широты спутника u_0 , то второе выражение (1.65) для гринвичской долготы примет вид

$$\begin{aligned}\lambda = \lambda_0 + \arctg(\tg u \cos i) - \arctg(\tg u_0 \cos i) - \\ - \omega_3 (i_r - t_{r0}).\end{aligned}\quad (1.66)$$

Используя полученные зависимости, рассмотрим влияние малых отклонений элементов орбиты T_c, e, i от их номинальных значений на характер и величину долготных и широтных перемещений стационарного спутника. При этом учитывая, что в (1.66) входит величина изменения времени, индекс «г» можно опустить.

В связи с тем, что наклонение квазистационарной орбиты близко к нулю, период обращения будем определять как время между двумя прохождениями спутника через фиксированную на некоторую эпоху плоскость, нормальную к плоскости экватора, например, плоскость XZ геоцентрической системы координат. Использование этой плоскости предпочтительно еще и потому, что при наиболее рациональном расположении плоскости начальной орбиты спутника по отношению к плоскостям орбит Луны и Солнца плоскость XZ остается практически перпенди-

Рассматривая сферический треугольник ABC (рис. 1.9), определим сначала прямое восхождение (α) и склонение (δ) спутника через угловые элементы Ω, u, i и параметр $\vartheta(t)$:

$$\alpha = \Omega + \arctg(\tg u \cos i), \quad (1.64)$$

$$\delta = \arcsin(\sin u \sin i).$$

Прямое восхождение и склонение связаны с гринвичской долготой и геоцентрической широтой (см. рис. 1.9) соотношениями

$$\begin{aligned}\alpha &= S + \lambda, \quad \delta = \varphi, \\ S &= S_0 + \omega_3 t_r.\end{aligned}$$

кулярной оскулирующей орбите спутника в течение всего срока его пребывания на ней [40]. Найденный таким образом период обращения будем называть сидерическим (более строгое определение сидерического периода обращения будет дано в гл. 2).

A. Отклонение сидерического периода обращения от звездных суток. Если $T_{\text{зв}} \neq T_c$, $e=0$, $i=0$, то, полагая, что в момент t_0 спутник находится в перигее, т. е. $\vartheta_0 = M_0 = 0$, из выражений (1.65), (1.66) имеем

$$\varphi = 0; \lambda = \lambda_0 + M - \omega_3(t - t_0). \quad (1.67)$$

Относительная скорость движения спутника по долготе в этом случае равна

$$\dot{\lambda} = n - \omega_3. \quad (1.68)$$

Так как $n = \frac{2\pi}{T_c}$, а $\omega_3 = \frac{2\pi}{T_{\text{зв}}}$, формулы (1.67) и (1.68) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= \lambda_0 + 2\pi \left(\frac{1}{T_c} - \frac{1}{T_{\text{зв}}} \right) (t - t_0), \\ \dot{\lambda} &= 2\pi \left(\frac{1}{T_c} - \frac{1}{T_{\text{зв}}} \right), \end{aligned}$$

откуда получим

$$\dot{\lambda} = -\omega_3 \frac{\Delta T}{T_c}, \quad (1.69)$$

где $\Delta T = T_c - T_{\text{зв}}$.

Из (1.69) следует, что отличие сидерического периода обращения от звездных суток (ΔT) вызывает смещение (дрейф) спутника по долготе с постоянной скоростью прямо пропорциональной величине ΔT .

При этом спутник на квазистационарной орбите смещается (дрейфует) по долготе относительно земной поверхности на Восток ($\dot{\lambda} > 0$), если период обращения T_c меньше звездных суток $T_{\text{зв}}$, и на Запад ($\dot{\lambda} < 0$), если период обращения больше звездных суток $T_{\text{зв}}$.

При вычислении величины скорости смещения по долготе $\dot{\lambda}_T$ за период обращения T_c (виток) по заданному значению ΔT (или наоборот — определении ΔT по $\dot{\lambda}_T$) удобно пользоваться достаточно точным соотношением $\dot{\lambda}_T = 15k\Delta T$, где k — коэффициент ($k = T_{\text{зв}}/T$), причем размерностям ΔT — час, минута, секунда соответствуют размерности $\dot{\lambda}_T$ соответственно градус, угловая минута, угловая секунда за виток. Например, при $\Delta T = 240$ с имеем $\dot{\lambda}_T = 15 \cdot 240 = 3600'' = 1^\circ$.

Б. Наличие эксцентриситета орбиты. Если $T_c = T_{\text{зв}}$, $e \neq 0$, $i=0$, то из (1.65), (1.66) имеем

$$\begin{aligned}\varphi &= 0, \dot{\lambda} = \dot{\vartheta} - \omega_3, \\ \lambda &= \lambda_0 + (\vartheta - \vartheta_0) - \omega_3(t - t_0).\end{aligned}\quad (1.70)$$

В уравнениях системы (1.70) значения разности истинной аномалии и скорости ее изменения для орбит с малыми эксцентриситетами определяются с точностью до линейных относительно эксцентриситета членов с помощью (1.63) по формулам

$$\vartheta - \vartheta_0 = M - M_0 + 2e(\sin M - \sin M_0),$$

$$\dot{\vartheta} = n + 2en \cos M,$$

подставляя которые в (1.70) и учитывая, что $n = \omega_3$, находим

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda_0 + 2e(\sin M - \sin M_0), \\ \dot{\lambda} &= 2\omega_3 e \cos M.\end{aligned}\quad (1.71)$$

Из полученных уравнений следует, что при наличии эксцентриситета орбиты движение спутника относительно фиксированной на момент прохождения перигея ($M_0=0$) подспутниковой точки ($\lambda_0=\lambda_{\text{п}}$) можно рассматривать практически как гармоническое колебание

$$\lambda - \lambda_{\text{п}} = 2e \sin M$$

с амплитудой $A_{\lambda_e} = 2e$ и периодом, равным периоду обращения спутника. Скорость относительного смещения $2\omega_3 e \cos M$ принимает экстремальные значения при прохождении спутником перигея и апогея, равные соответственно $2\omega_3 e$ и $(-2\omega_3 e)$.

Изменение долготы спутника для различных значений эксцентриситета при $\lambda_{\text{п}}=0$ показано на рис. 1.10, где $\lambda_{\text{в}}$ и $\lambda_{\text{з}}$ соответственно восточная и западная гринвичские долготы.

Рис. 1.10. Зависимость движения спутника по долготе за счет эллиптичности орбиты ($T=86164$ с; $i=0$): 1—5 соответствуют $e=0,001 \dots 0,005$ с шагом 0,001

Заданный просмотр *Защищенный просмотр* *Защищенный просмотр*

В. Совместное влияние ΔT и e . Если $T_c \neq T_{зв}$, $e \neq 0$, $i = 0$, то, используя (1.66) и (1.61), найдем

$$\lambda = \lambda_0 + (M - M_0) \left(1 - \frac{T_c}{T_{зв}} \right) + 2e (\sin M - \sin M_0), \quad (1.72)$$

$$\dot{\lambda} = 2\pi \left(\frac{1 + 2e \cos M}{T_c} - \frac{1}{T_{зв}} \right).$$

Из (1.72) видно, что при отклонении сидерического периода обращения от звездных суток и наличии эксцентриситета имеет место вековая и периодическая составляющие долготных перемещений стационарного спутника. Спутник смещается по квазистационарной орбите в восточном направлении ($\dot{\lambda} > 0$), если $T_c < T_{зв}(1 - 2e)$, и в западном направлении ($\dot{\lambda} < 0$), если $T_c > T_{зв}(1 + 2e)$. При $T_{зв}(1 - 2e) \leq T_c \leq T_{зв}(1 + 2e)$ движение спутника относительно поверхности Земли по долготе в течение оборота имеет место в обоих направлениях.

Г. Наличие наклонения орбиты. Если $T_c = T_{зв}$, $e = 0$, $i \neq 0$, то, как следует из (1.65), спутник перемещается относительно поверхности Земли по широте и долготе. При наличии малого наклонения орбиты спутник совершает гармонические колебания по широте

$$\varphi = i \sin u \quad (1.73)$$

с амплитудой $A_{\Phi_i} = i$ и периодом, равным периоду обращения спутника. Скорость изменения широты $\dot{\varphi} = \omega_3 i \cos u$ принимает максимальное по модулю значение, равное $\frac{2\pi}{T_{зв}} i$, при пересечении спутником экваториальной плоскости, т. е. при $u = 0, \pi$, и минимальное значение, равное нулю, при $u = \pi/2, 3\pi/2$, когда спутник достигает соответственно максимальных северной и южной широт.

Наличие наклонения орбиты вызывает также периодические перемещения спутника по долготе. Производя дифференцирование второго уравнения соотношения (1.65) и преобразование полученного выражения с учетом малости наклонения ($\sin i \gg 1$),

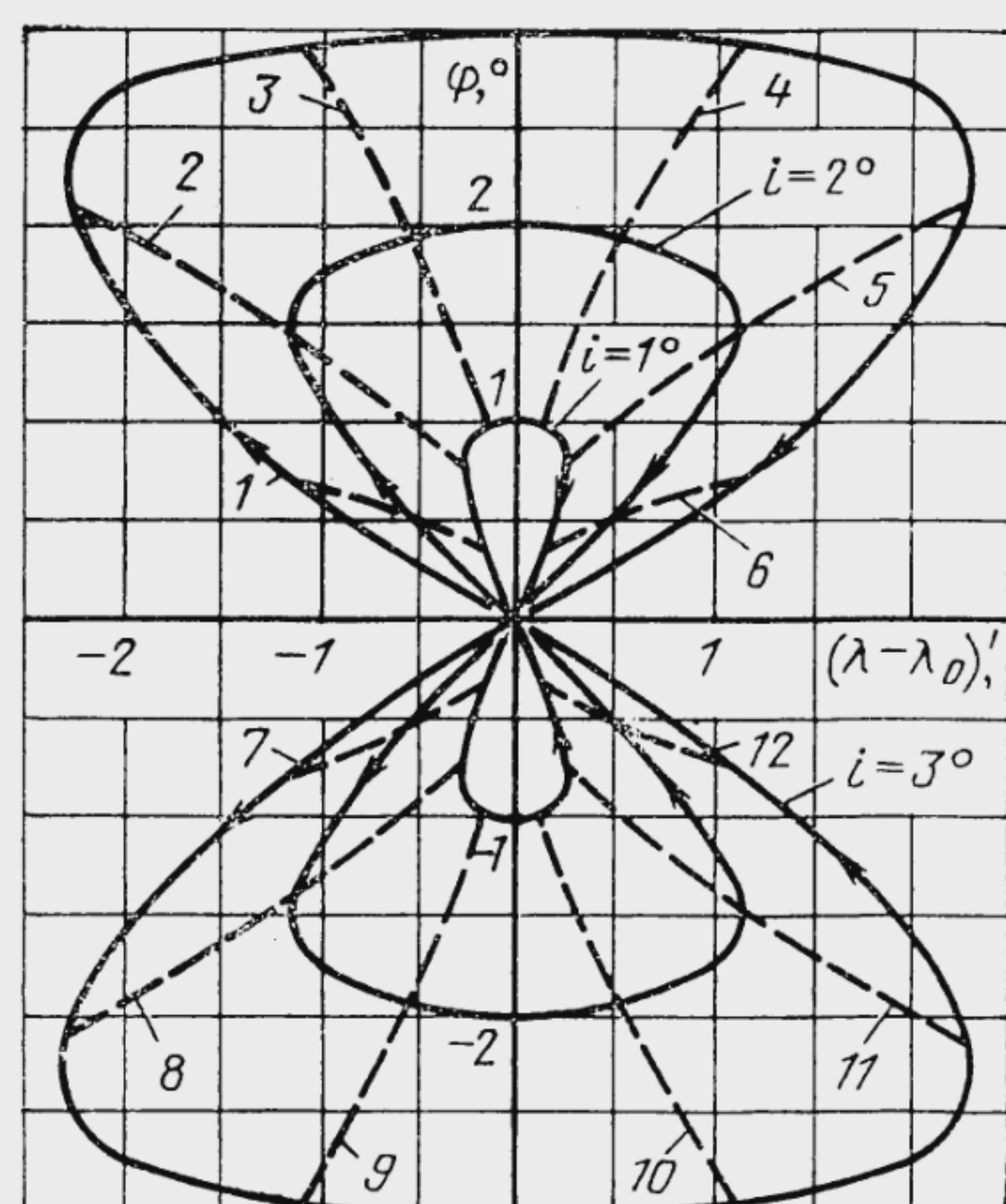


Рис. 1.11. Трассы спутника ($T = 86164$ с, $e = 0$):
1–12 соответствуют $u = 15 \dots 345^\circ$ с шагом 30°

найдем скорость изменения долготы спутника

$$\dot{\lambda} = \omega_3 i^2 \left(\sin^2 u - \frac{1}{2} \right). \quad (1.74)$$

Из полученного выражения видно, что период колебания спутника по долготе равен половине звездных суток. Трассы полета спутника $\varphi(\lambda)$ для различных значений наклонения изображены на рис. 1.11. Там же приведены линии равных значений аргумента широты, позволяющие проследить изменение положения спутника относительно поверхности Земли в зависимости от его положения на орбите.

Из рис. 1.11 и формулы

$$\lambda = \lambda_0 - \frac{i^2}{4} (\sin 2u - \sin 2u_0), \quad (1.75)$$

полученной путем интегрирования (1.74), видно, что при наличии наклонения орбиты движение спутника относительно фиксированной на момент прохождения восходящего узла ($u_0=0$) подспутниковой точки (λ_0) можно рассматривать практически как гармоническое колебание с амплитудой $A_{\lambda_i} = \frac{i^2}{4}$ и периодом, равным половине периода обращения спутника. Следует отметить, что указанный период колебаний имеет место для строго круговой орбиты и для оклокруговых орбит с $\omega=0$ или $\omega=\pi$. Значения аргумента широты, при которых спутник максимально отклоняется на Восток, равны $\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{7\pi}{4}$, на Запад — $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$.

Д. Совместное влияние ΔT , e , i . Если все фактические элементы орбиты отличны от элементов геостационарной орбиты, т. е. $\Delta T \neq 0$, $e \neq 0$, $i \neq 0$, то спутник смещается относительно поверхности Земли как по широте, так и по долготе. При этом в первом приближении уравнения, определяющие долготные и широтные перемещения, могут быть на основании (1.72), (1.73) и (1.75) записаны в виде

$$\lambda = \lambda_0 + (M - M_0) \left(1 - \frac{T_c}{T_{зв}} \right) + 2e (\sin M - \sin M_0) - \frac{i^2}{4} (\sin 2u - \sin 2u_0), \quad (1.76)$$

$$\varphi = \varphi_0 + i (\sin u - \sin u_0),$$

где

$$u = \omega_0 + M + 2e \sin M, \quad u_0 = \omega_0 + M_0 + 2e \sin M_0.$$

В заключение отметим, что соотношения (1.76) можно использовать при анализе движения спутника относительно не-

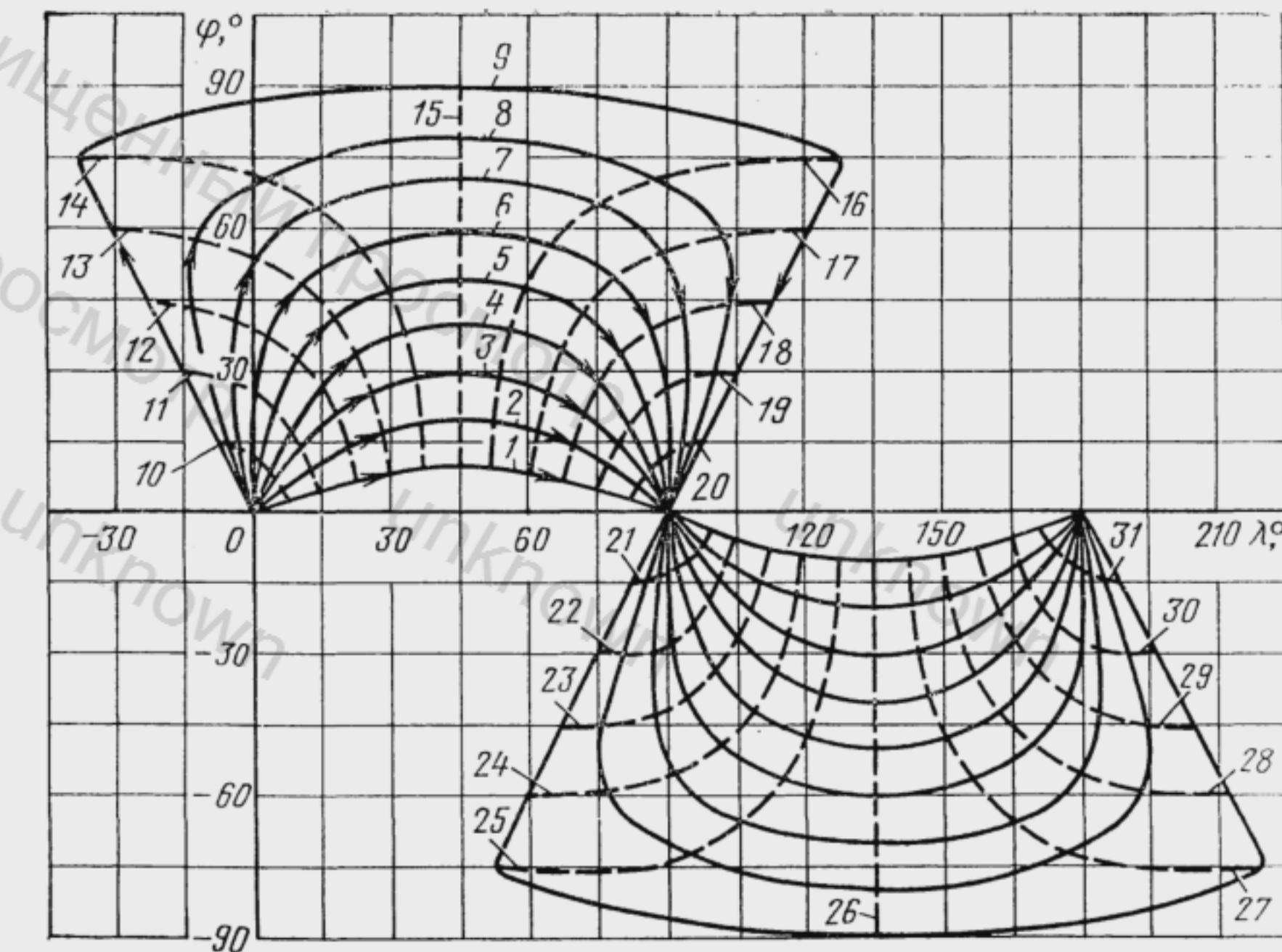
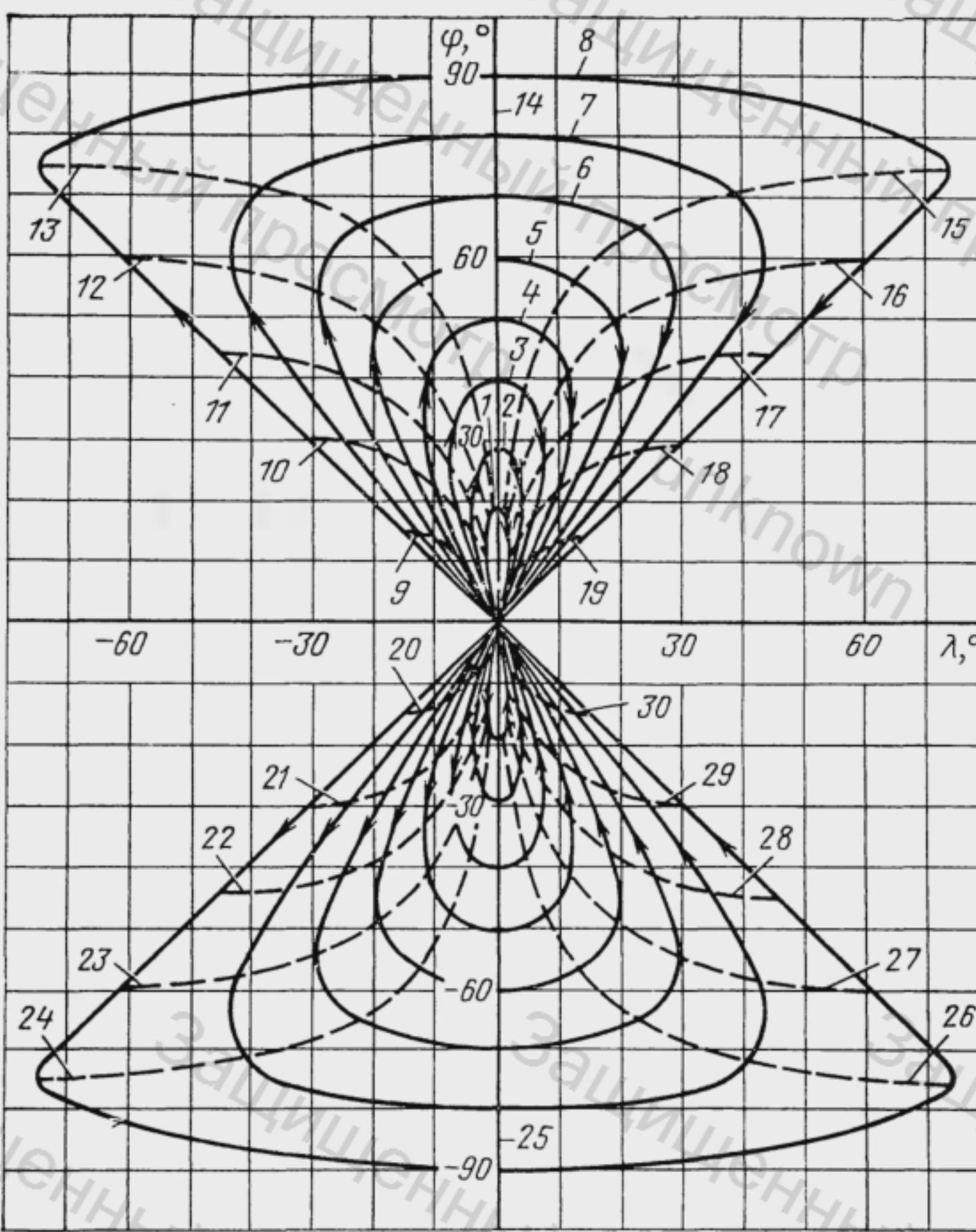


Рис. 1.13. Трассы спутника ($T = 43082$ с, $e = 0$)

1—9 соответствуют $i = 10 \dots 90^\circ$ с шагом 10° ; 10—20 соответствуют $\mu = 15 \dots 165^\circ$ с шагом 15° ; 21—31 соответствуют $\mu = 195 \dots 345^\circ$ с шагом 15°

Рис. 1.12. Трассы спутника ($T = 86164$ с, $e = 0$):

1—8 соответствуют $i = 20 \dots 90^\circ$ с шагом 10° ; 9—19 соответствуют $\mu = 15 \dots 165^\circ$ с шагом 15° ; 20—30 соответствуют $\mu = 195 \dots 345^\circ$ с шагом 15°

которого гипотетического спутника, движущегося по круговой орбите с номинальными периодом обращения и наклонением.

В этом случае параметры, входящие в (1.76), нужно понимать следующим образом:

φ , φ_0 — текущее и начальное значения склонения спутника относительно плоскости номинальной орбиты;

i — разность между наклонениями реальной и номинальной орбит;

u , u_0 — текущее и начальное значения аргумента широты спутника, вычисленные относительно линии пересечения реальной и номинальной орбит;

λ , λ_0 — текущее и начальное значения аргумента широты в плоскости номинальной орбиты;

T_c , $T_{\text{зв}}$ — действительный и номинальный периоды обращения.

Поскольку в дальнейшем вопросы управления будут рассматриваться на примерах околокруговых суточных (стационарной и наклонных) и полусуточной орбит, на рис. 1.12, 1.13 приведены соответствующие этим орбитам трассы при различных значениях наклонения.

Г л а в а 2

ВОЗМУЩЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ИСЗ

2.1. ОСКУЛИРУЮЩИЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Наряду с влиянием центрального гравитационного поля Земли на ИСЗ действуют также силы, обусловленные нецентробежностью поля тяготения, притяжением Луны и Солнца, давлением солнечного света, сопротивлением атмосферы и др. Эти силы, малые по сравнению с основной центральной силой тяготения, принято называть возмущающими. Действие данных сил вызывает отклонения (возмущения) координат и скорости (элементов орбиты) относительно невозмущенного движения. Движение спутника с учетом возмущающих сил называется возмущенным движением. Возмущения элементов орбиты принято разделять на периодические, например, повторяющиеся с периодом обращения спутника по орбите, и вековые, непрерывно возрастающие с увеличением времени полета. Наиболее существенными являются вековые возмущения, которые за длительный промежуток времени могут оказать заметное влияние на характер орбитального движения спутника.

Для устранения возникающих отклонений в элементах орбиты используется управляющая сила, создаваемая специальными бортовыми ракетными двигателями.

Дифференциальные уравнения возмущенного движения спутника в ГЭСК имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \mu \frac{x}{r^3} &= \sum_{j=0}^k \Delta g_{jx}, \\ \ddot{y} + \mu \frac{y}{r^3} &= \sum_{j=0}^k \Delta g_{jy}, \\ \ddot{z} + \frac{\mu z}{r^3} &= \sum_{j=0}^k \Delta g_{jz}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $\sum_{j=0}^k \Delta g_{jx}$, $\sum_{j=0}^k \Delta g_{jy}$, $\sum_{j=0}^k \Delta g_{jz}$ — суммы проекций возмущающих и управляющих ускорений на соответствующие оси ГЭСК. Если составляющие возмущающего ускорения являются частными производными по соответствующим координатам от одной и той же функции $R(x, y, z, t)$ координат движущегося спутника и времени, то функция R называется возмущающей или пертурбационной функцией.

Дифференциальные уравнения возмущенного движения ИСЗ в общем случае не интегрируются в конечном виде, поэтому при проведении точных расчетов используется численное интегрирование. Для качественного анализа весьма удобными оказываются различные приближенные решения, которые могут быть получены путем применения известного в небесной механике метода оскулирующих элементов.

Существо этого метода состоит в том, что возмущенное движение рассматривается как непрерывно изменяющееся кеплеровское движение, а действительная орбита — как огибающая семейства кеплеровских орбит. Так как траектории возмущенного движения в каждый момент являются оскулирующими (соприкасающимися), то, следовательно, действительная орбита есть непрерывно изменяющаяся орбита.

Элементы такой орбиты: долгота восходящего узла $\Omega(t)$, наклонение $i(t)$, угловое расстояние перигея $\omega(t)$, фокальный параметр $p(t)$, эксцентриситет $e(t)$, время прохождения перигея $\tau_p(t)$ называются оскулирующими элементами.

В качестве оскулирующих элементов используют и другие параметры, например, оскулирующую большую полуось $a(t)$ и оскулирующий период обращения $T(t)$. Последний определяется по значению большой полуоси в момент t и представляет собой период обращения для невозмущенной орбиты, по которой двигался бы спутник, если бы, начиная с момента t , перестали действовать все возмущающие ускорения.

Вместе с тем необходимо отметить, что оскулирующий период обращения не является удобным параметром для харак-

теристики времени обращения ИСЗ по возмущенной орбите, так как вследствие действующих возмущений орбита не представляет собой замкнутую кривую. Наряду с оскулирующим периодом используются сидерический (T_c) и драконический (T_Ω) периоды обращения.

Сидерический период обращения определяется как время движения

Рис. 2.1. К определению сидерического и драконического периодов обращения

спутника между двумя последовательными одноименными пересечениями спутником плоскости (точки A_0 и A_1 , рис. 2.1), нормальной к оскулирующей орбите в момент первого пересечения (точка A_0). Драконический период обращения есть время между двумя последовательными прохождениями спутника через восходящие узлы Ω_0 и Ω_1 .

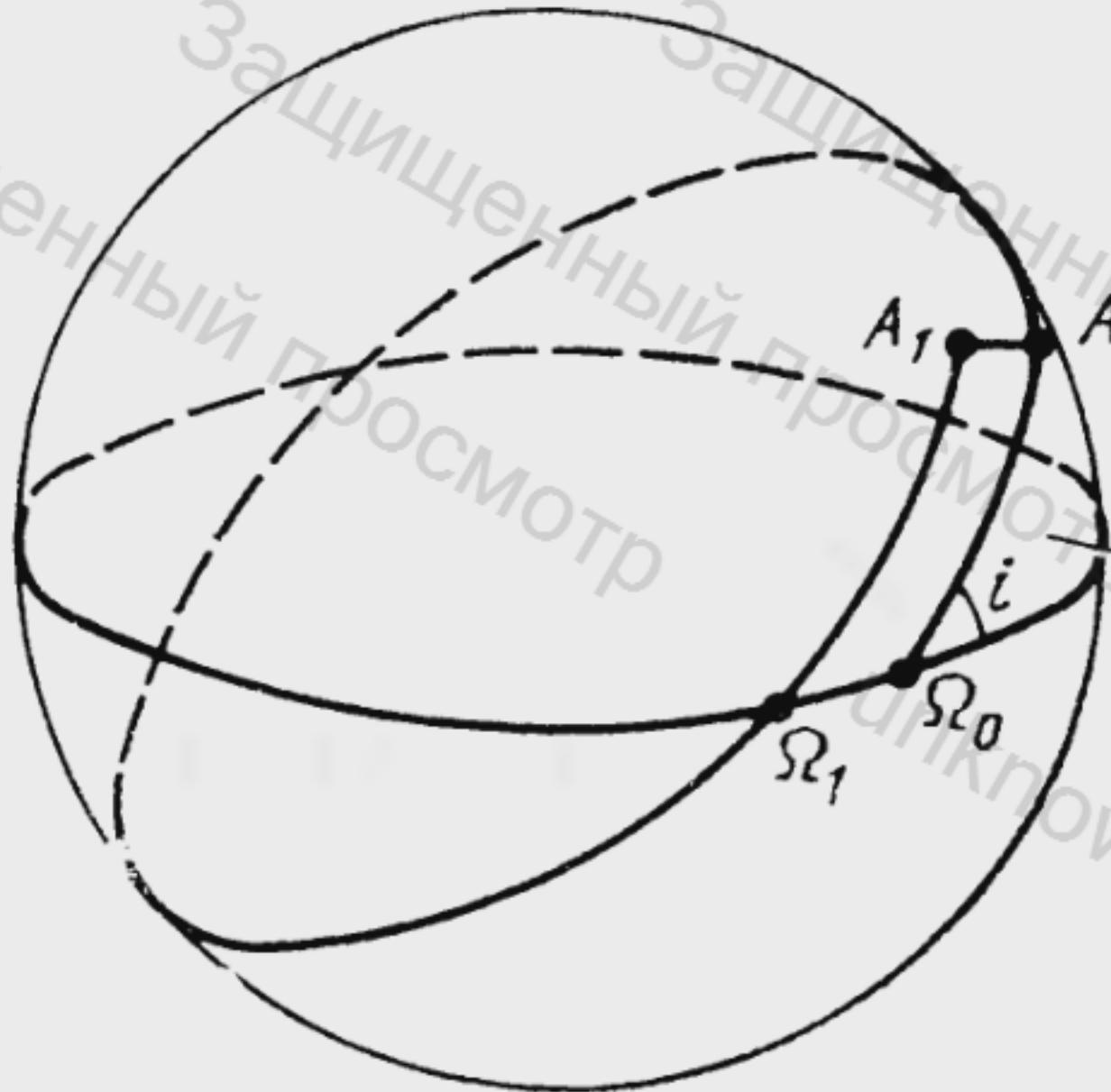
Применяя оскулирующие элементы в качестве новых переменных вместо системы (2.1), можно получить систему шести дифференциальных уравнений первого порядка относительно оскулирующих элементов. При выводе этих уравнений используется СОСК.

Формулы преобразования проекций ускорения Δg между ГЭСК XYZ и СОСК $X_S Y_T Z_W$ в соответствии с (1.11), (1.20) имеют вид

$$\begin{pmatrix} \Delta g_{x_S} \\ \Delta g_{y_T} \\ \Delta g_{z_W} \end{pmatrix} = \mathbf{M}_c^T \begin{pmatrix} \Delta g_x \\ \Delta g_y \\ \Delta g_z \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Приемы получения системы дифференциальных уравнений, описывающих возмущенное движение в оскулирующих элементах, изложены в [2, 10, 29]. Ниже приведено ее конечное выражение

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r}{V\mu p} \sin u \operatorname{cosec} i \sum_{j=0}^k \Delta g_{iz_W}, \\ \frac{di}{dt} &= \frac{r}{V\mu p} \cos u \sum_{j=0}^k \Delta g_{iz_W}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[-\frac{\cos \vartheta}{e} \sum_{j=0}^k \Delta g_{jx_S} + \frac{\sin \vartheta}{e} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sum_{j=0}^k \Delta g_{jy_T} - \right. \end{aligned}$$



(2.3)

$$\begin{aligned}
 & -\frac{r}{p} \sin u \operatorname{ctg} i \sum_{j=0}^k \Delta g_{jz_W} \Big], \\
 & \frac{dp}{dt} = 2r \sqrt{\frac{p}{\mu}} \sum_{j=0}^k \Delta g_{iy_T}, \\
 & \frac{de}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ \sin \vartheta \sum_{j=0}^k \Delta g_{jx_S} + \left[\cos \vartheta + (\cos \vartheta + e) \frac{r}{p} \right] \sum_{j=0}^k \Delta g_{jy_T} \right\}, \\
 & \frac{d\tau_p}{dt} = \frac{r^2}{e\mu} \left[(eN \sin \vartheta - \cos \vartheta) \sum_{j=0}^k \Delta g_{jx_S} + \frac{p}{r} N \sum_{j=0}^k \Delta g_{jy_T} \right], \\
 & \text{где } N = 2 \frac{p^2}{r^2} \int_0^\vartheta \frac{\cos \vartheta d\vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^3}.
 \end{aligned}$$

Соотношения (2.3) называются уравнениями Ньютона [10]. Эти уравнения, как и исходные уравнения (2.1), в конечном виде не интегрируются. Однако преимущество их состоит в том, что, во-первых, при малых возмущающих силах оскулирующие элементы мало изменяются и поэтому для решения системы можно использовать метод последовательных приближений; во-вторых, для отдельных видов возмущающих и управляющих сил они позволяют получить приближенные аналитические зависимости.

Можно использовать также дифференциальное уравнение для оскулирующего периода

$$\frac{dT}{dt} = 6\pi \frac{p^2}{\mu (1 - e^2)^{5/2}} \left[e \sin \vartheta \sum_{j=0}^k \Delta g_{jx_S} + (1 + \cos \vartheta) \sum_{j=0}^k \Delta g_{jy_T} \right]. \quad (2.4)$$

Учитывая связи аргумента широты u , истинной аномалии ϑ , средней аномалии M , времени прохождения перигея τ_p , шестое уравнение системы (2.3) можно заменить любым дифференциальным уравнением (2.5), (2.6), (2.7):

$$\frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{r}{p} \operatorname{ctg} i \sin u \sum_{j=0}^k \Delta g_{jz_W}, \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vartheta}{dt} = & \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} + \frac{\cos \vartheta}{e} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \sum_{j=0}^k \Delta g_{jx_S} - \\
 & - \frac{\sin \vartheta}{e} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sqrt{\frac{p}{\mu}} \sum_{j=0}^k \Delta g_{jy_T}, \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dM}{dt} = & n + \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \left(\cos \vartheta - 2e \frac{r}{p} \right) \sqrt{\frac{p}{\mu}} \sum_{j=0}^k \Delta g_{jx_S} - \\
 & - \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sqrt{\frac{p}{\mu}} \sin \vartheta \sum_{j=0}^k \Delta g_{jy_T}. \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

Известны также и другие системы дифференциальных уравнений, описывающих возмущенное движение, отличающиеся либо совокупностью используемых оскулирующих элементов, либо аргументом, по которому производится дифференцирование [10, 33, 36].

В эти системы входят эксцентриситет орбиты e и аргумент перигея ω . Для околокруговых орбит эксцентриситет может быть сколь угодно малой величиной. В этом случае в правых частях дифференциальных уравнений появляется малый делитель, в результате чего при $e \approx 0$ величина аргумента перигея становится неопределенной. Указанная особенность затрудняет описание движения спутников по орбитам с малым эксцентриситетом. Однако этот недостаток может быть устранен, если вместо элементов e и ω ввести новые параметры q и k , являющиеся компонентами вектора Лапласа [33],

$$q = \frac{|f|}{\mu} \cos \omega = e \cos \omega,$$

$$k = \frac{|f|}{\mu} \sin \omega = e \sin \omega.$$

Уравнения системы (2.3) при переходе к новым параметрам q и k примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r}{V\mu p} \frac{\sin u}{\sin i} \sum_{j=0}^k \Delta g_{jz_W}, \\ \frac{di}{dt} &= \frac{r}{V\mu p} \cos u \sum_{j=0}^k \Delta g_{jz_W}, \\ \frac{dp}{dt} &= 2r \sqrt{\frac{p}{\mu}} \sum_{j=0}^k \Delta g_{jy_T}, \\ \frac{dq}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ \sin u \sum_{j=0}^k \Delta g_{jx_S} + \right. \\ &\quad + \left[\left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos u + \frac{r}{p} q \right] \sum_{j=0}^k \Delta q_{jy_T} + \\ &\quad \left. + \frac{r}{p} k \sin u \operatorname{ctg} i \sum_{j=0}^k \Delta g_{jz_W} \right\}, \\ \frac{dk}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ -\cos u \sum_{j=0}^k \Delta g_{jx_S} + \right. \\ &\quad + \left[\left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin u + \frac{r}{p} k \right] \sum_{j=0}^k \Delta q_{jy_T} - \\ &\quad \left. - \frac{r}{p} q \sin u \operatorname{ctg} i \sum_{j=0}^k \Delta g_{jz_W} \right\}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} \left(1 - \frac{r^3}{\mu p} \operatorname{ctg} i \sin u \sum_{j=0}^k \Delta g_{jz_W} \right),$$

где $r = \frac{p}{1 + q \cos u + k \sin u}$.

Введение параметров q и k для описания движения ИСЗ позволяет устраниить особенности в уравнениях динамики при малых значениях эксцентриситета. Однако в рассмотренных выше уравнениях имеются еще и особенности, проявляющиеся при движении спутников по околоэкваториальным орбитам, т. е. при $i \approx 0$. Модель движения ИСЗ, свободную от указанных особенностей (при $e \approx 0$, $i \approx 0$), можно получить с использованием несингулярных равноденственных элементов, определяемых через традиционные элементы орбиты следующим образом [43]:

$$h = \sqrt{\frac{p}{\mu}},$$

$$e_x = e \cos(\omega + \Omega),$$

$$e_y = e \sin(\omega + \Omega),$$

$$i_x = \operatorname{tg} \frac{i}{2} \cos \Omega,$$

$$i_y = \operatorname{tg} \frac{i}{2} \sin \Omega,$$

$$F = \Omega + \omega + \vartheta.$$

Дифференцируя данные соотношения по времени с учетом (2.3), (2.6), получим

$$\frac{dh}{dt} = \frac{h^2}{\xi} \sum_{j=0}^k \Delta g_{iy_T},$$

$$\begin{aligned} \frac{de_x}{dt} &= h \left\{ \sin F \sum_{j=0}^k \Delta g_{jx_S} + [\cos F (\xi + 1) + \right. \\ &\quad \left. + e_x] \sum_{j=0}^k \Delta g_{jy_T} - \frac{e_y \eta}{\xi} \sum_{j=0}^k \Delta g_{jz_W} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{de_y}{dt} &= h \left\{ -\cos F \sum_{j=0}^k \Delta g_{jx_S} + [\sin F (\xi + 1) + \right. \\ &\quad \left. + e_y] \sum_{j=0}^k \Delta g_{jy_T} + \frac{e_x \eta}{\xi} \sum_{j=0}^k \Delta g_{jz_W} \right\}, \end{aligned}$$

$$\frac{di_x}{dt} = \frac{h \tilde{\Phi}}{2\xi} \cos F \sum_{j=0}^k \Delta g_{jz_W},$$

$$\frac{di_y}{dt} = \frac{\tilde{h}\Phi}{2\xi} \sin F \sum_{j=0}^k \Delta g_{jz_W},$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\xi^2}{h^3 \mu} + h \eta \sum_{j=0}^k \Delta g_{jz_W},$$

где $\xi = 1 + e_x \cos F + e_y \sin F$,

$$\eta = i_x \sin F - i_y \cos F,$$

$$\tilde{\varphi} = 1 + i_x^2 + i_y^2.$$

Если проекции возмущенного ускорения являются частными производными от возмущающей (пертурбационной) функции $R(x, y, z, t)$, составляющие ускорений в уравнениях Ньютона могут быть выражены через частные производные функции R по элементам оскулирующей орбиты [10]:

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{V\mu p \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \frac{di}{dt} &= \frac{1}{V\mu p \sin i} \left(-\frac{\partial R}{\partial \Omega} + \cos i \frac{\partial R}{\partial \omega} \right), \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{1}{V\mu p} \left(-\frac{\cos i}{\sin i} \frac{\partial R}{\partial i} - 2p \frac{\partial R}{\partial p} + \frac{1-e^2}{e} \frac{\partial R}{\partial e} \right), \\ \frac{dp}{dt} &= 2 \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\partial R}{\partial \omega}, \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{1-e^2}{e V\mu p} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{p}{\mu e} \frac{\partial R}{\partial \tau_{\Pi}}, \\ \frac{d\tau_{\Pi}}{dt} &= \frac{p}{\mu e} \frac{\partial R}{\partial e}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Уравнения системы (2.9) называются уравнениями Лагранжа.

При исследовании возмущенного движения в зависимости от параметров орбиты и требований к точности их определения учитываются те или иные составляющие вектора возмущающих ускорений, входящих в правые части приведенных выше уравнений.

Ниже рассматриваются возмущения орбиты, обусловленные действием нецентральности поля тяготения ($j=0$), притяжением Луны ($j=1$) и Солнца ($j=2$), давлением солнечного света ($j=-3$) и влиянием управляющей силы ($j=4$).

2.2. ПОТЕНЦИАЛ ПОЛЯ ТЯГОТЕНИЯ

При исследовании возмущенного движения спутника под действием притяжения Земли составляющие вектора ускорения Δg_0 могут быть определены путем дифференцирования по ко-

ординатам возмущающей функции $R = \Delta U$ потенциала притяжения Земли. Возмущающая функция ΔU определяется как разность между принятой моделью потенциалов силы тяжести Земли U и силы тяжести шарообразной Земли со сферическим распределением плотности

$$\Delta U = U - \frac{\mu}{r}.$$

Наиболее удобным является представление потенциала притяжения Земли в виде разложения по сферическим функциям. Международным астрономическим союзом рекомендована следующая форма записи гравитационного потенциала U во внешней точке с географическими координатами r, φ, λ [8, 36]:

$$U = \frac{\mu}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} c_{n0} \left(\frac{R_\oplus}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi) + \right. \\ \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{R_\oplus}{r} \right)^n P_{nm}(\sin \varphi) (c_{nm} \cos m \lambda + d_{nm} \sin m \lambda) \right], \quad (2.10)$$

в которой $\mu = 398601,3 \text{ км}^3/\text{с}^2$; R_\oplus — средний экваториальный радиус Земли, равный 6378,140 км [8], c_{n0} , c_{nm} , d_{nm} — безразмерные коэффициенты, зависящие от формы и распределения масс внутри Земли; $P_n(\sin \varphi)$ — полиномы Лежандра порядка n ; $P_{nm}(\sin \varphi)$ — присоединенные функции Лежандра порядка n и индекса m ; φ, λ — геоцентрическая широта и гринвичская долгота соответственно.

Наряду с (2.10), широко распространена и другая форма записи разложения потенциала притяжения Земли по сферическим функциям

$$U = \frac{\mu}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R_\oplus}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi) + \right. \\ \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{R_\oplus}{r} \right)^n J_{nm} P_{nm}(\sin \varphi) \cos m(\lambda - \lambda_{nm}) \right], \quad (2.11)$$

где коэффициенты J_n , J_{nm} и λ_{nm} связаны с c_{nm} и d_{nm} равенствами

$$J_n = -c_{n0}, \quad J_{nm} = \sqrt{c_{nm}^2 + d_{nm}^2}, \quad \lambda_{nm} = \arctg \frac{d_{nm}}{c_{nm}} \quad \text{или} \quad c_{nm} = \\ = J_{nm} \cos m \lambda_{nm}, \quad d_{nm} = J_{nm} \sin m \lambda_{nm}.$$

Первый член (гармоника нулевого порядка, $n=0$) в формулах (2.10), (2.11) представляет потенциал шарообразной Земли со сферическим распределением плотности. Первая гармоника ($n=m=1$) обращена в нуль выбором начала координат в центре масс (центре инерции) Земли, т. е.

$$c_{10} = c_{11} = d_{11} = 0.$$

Сферические функции, входящие в (2.10), (2.11), в зависимости от соотношения величин n и m называются: зональными (при $m=0$), секториальными (при $n=m$) и тессеральными (при $0 < m < n$) гармониками.

Из приведенных разложений (2.10), (2.11) находятся составляющие Δg_{0x} , Δg_{0y} , Δg_{0z} от возмущающей части потенциала притяжения Земли ΔU , входящие в уравнение (2.1):

$$\begin{aligned} \Delta g_{0xi} = \frac{\partial \Delta U}{\partial x_i} = & \sum_{n=2}^{\infty} c_{n0} \frac{\mu R_e^n}{r^{n+1}} \left[\frac{n+1}{r} P_n(\sin \varphi) \times \right. \\ & \times \frac{\partial r}{\partial x_i} - \frac{\partial P_n(\sin \varphi)}{\partial (\sin \varphi)} \frac{\partial (\sin \varphi)}{\partial x_i} \Big] + \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{\mu R_e^n}{r^{n+1}} \left[- \frac{n+1}{r} P_{nm}(\sin \varphi) (c_{nm} \cos m\lambda + \right. \\ & + d_{nm} \sin m\lambda) \frac{\partial r}{\partial x_i} + (c_{nm} \cos m\lambda + d_{nm} \sin m\lambda) \times \\ & \times \frac{\partial P_{nm}(\sin \varphi)}{\partial (\sin \varphi)} \frac{\partial (\sin \varphi)}{\partial x_i} + P_{nm}(\sin \varphi) (-c_{nm} \sin m\lambda + \\ & \left. + d_{nm} \cos m\lambda) m \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \right], \end{aligned} \quad (2.12)$$

где $i = 1, 2, 3$; $x_1 = x$; $x_2 = y$; $x_3 = z$ — координаты ИСЗ в ГЭСК,

$$\begin{aligned} \sin \varphi = & \frac{z}{r}; \quad \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}; \quad \frac{\partial}{\partial x} (\sin \varphi) = -\frac{xz}{r^3}; \\ \frac{\partial}{\partial y} (\sin \varphi) = & -\frac{yz}{r^3}; \quad \frac{\partial}{\partial z} (\sin \varphi) = \frac{x^2 + y^2}{r^3}, \\ \frac{\partial \lambda}{\partial x} = & -\frac{y}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial z} = 0, \end{aligned}$$

а λ определяется из соотношений

$$\sin \lambda = \frac{-x \sin S + y \cos S}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos \lambda = \frac{x \cos S + y \sin S}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

где S — угол между направлениями из центра Земли на точку весеннего равнодействия и на гринвичский меридиан (гринвичское звездное время).

Для определения составляющих возмущающего потенциала по координатным осям X_S , Y_T , Z_W разложим сначала возмущающее ускорение на составляющие, направленные по радиусу-вектору спутника (Δg_{0x_r}), по нормали к нему в плоскости меридиана ($\Delta g_{0\Phi}$) и по нормали к плоскости меридиана ($\Delta g_{0\lambda}$):

$$\Delta g_{0x_r} = \frac{\partial \Delta U}{\partial r}, \quad \Delta g_{0\Phi} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta U}{\partial \Phi}, \quad \Delta g_{0\lambda} = \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial \Delta U}{\partial \lambda}. \quad (2.13)$$

Суммируя теперь проекции $\Delta g_{0\phi}$ и $\Delta g_{0\lambda}$ на направления Y_T , Z_W (рис. 2.2), найдем

$$\begin{aligned}\Delta g_{0Y_T} &= \frac{\partial \Delta U}{\partial \varphi} \frac{\cos \gamma}{r} + \frac{\sin \gamma}{r \cos \varphi} \frac{\partial \Delta U}{\partial \lambda}, \\ \Delta g_{0Z_W} &= \frac{\sin \gamma}{r} \frac{\partial \Delta U}{\partial \varphi} - \frac{\cos \gamma}{r \cos \varphi} \frac{\partial \Delta U}{\partial \lambda}.\end{aligned}\quad (2.14)$$

Функции угла γ можно выразить через элементы орбиты по формулам сферической тригонометрии из сферического треугольника ABC (см. рис. 2.2):

$$\cos \gamma = \frac{\cos u \sin i}{\cos \varphi}, \quad \sin \gamma = \frac{\cos i}{\cos \varphi}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\Delta g_{0X_S} &= \frac{\partial \Delta U}{\partial r}, \\ \Delta g_{0Y_T} &= \frac{\cos u \sin i}{r \cos \varphi} \frac{\partial \Delta U}{\partial \varphi} + \frac{\cos i}{r \cos^2 \varphi} \frac{\partial \Delta U}{\partial \lambda}, \\ \Delta g_{0Z_T} &= \frac{\cos i}{r \cos \varphi} \frac{\partial \Delta U}{\partial \varphi} - \frac{\cos u \sin i}{r \cos^2 \varphi} \frac{\partial \Delta U}{\partial \lambda},\end{aligned}\quad (2.15)$$

где

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta U}{\partial r} &= \sum_{n=2}^{\infty} c_{n0} \frac{\mu R_e^n (n+1)}{r^{n+2}} P_n(\sin \varphi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n - \\ &- \frac{(n+1) \mu R_e^n}{r^{n+2}} P_{nm}(\sin \varphi) (c_{nm} \cos m \lambda + d_{nm} \sin m \lambda), \\ \frac{\partial \Delta U}{\partial \varphi} &= - \sum_{n=2}^{\infty} c_{n0} \frac{\mu R_e^n \cos \varphi}{r^{n+1}} \frac{\partial P_n(\sin \varphi)}{\partial \sin \varphi} + \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{\mu R_e^n \cos \varphi}{r^{n+1}} \frac{\partial P_{nm}(\sin \varphi)}{\partial \sin \varphi} (c_{nm} \cos m \lambda + d_{nm} \sin m \lambda), \\ \frac{\partial \Delta U}{\partial \lambda} &= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{\mu R_e^n m}{r^{n+1}} \times \\ &\times P_{nm}(\sin \varphi) (-c_{nm} \sin m \lambda + \\ &+ d_{nm} \cos m \lambda).\end{aligned}\quad (2.16)$$

Значения коэффициентов c_{nm} , d_{nm} первых гармоник до шестого порядка включительно сведены в табл. 1 [40]. Они получены пересчетом коэффициентов гармоник, приведенных в [8].

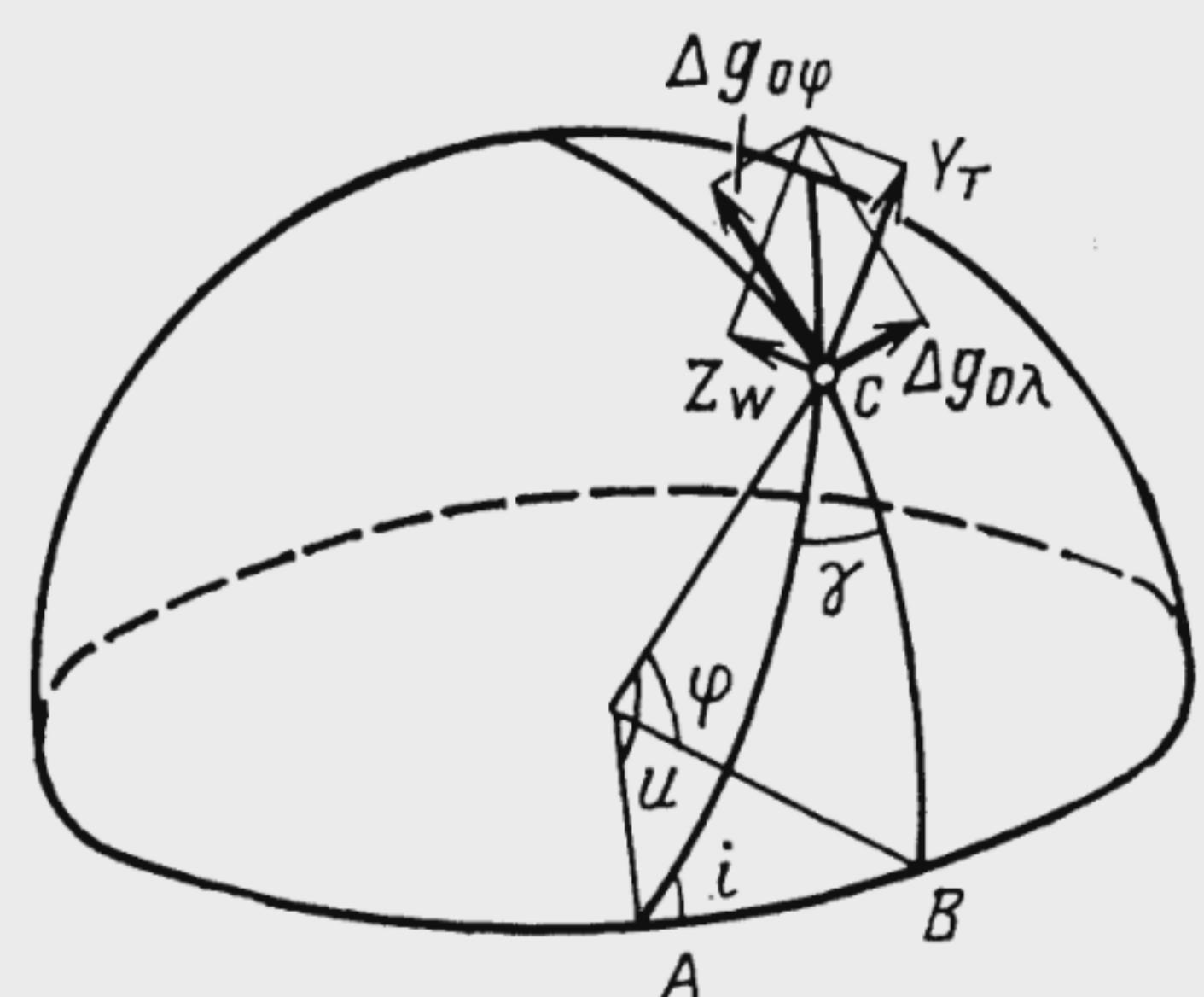


Рис. 2.2. Составляющие ускорения возмущающего потенциала

Таблица 2.1

n	m	c_{nm}	d_{nm}	n	m	c_{nm}	$d_{n,m}$
2	0	$1,0826 \cdot 10^{-3}$	—	5	1	$-4,5958 \cdot 10^{-8}$	$-6,8485 \cdot 10^{-8}$
2	2	$1,5362 \cdot 10^{-6}$	$-8,8149 \cdot 10^{-7}$	5	2	$9,6889 \cdot 10^{-8}$	$6,4588 \cdot 10^{-8}$
3	0	$-2,5410 \cdot 10^{-6}$	—	5	3	$-1,9302 \cdot 10^{-8}$	$-5,3972 \cdot 10^{-9}$
3	1	$2,1578 \cdot 10^{-6}$	$2,4127 \cdot 10^{-7}$	5	4	$-9,0188 \cdot 10^{-10}$	$-3,5344 \cdot 10^{-10}$
3	2	$2,6584 \cdot 10^{-7}$	$-2,5795 \cdot 10^{-7}$	5	5	$3,4363 \cdot 10^{-10}$	$-2,1382 \cdot 10^{-9}$
3	3	$6,8343 \cdot 10^{-8}$	$2,1311 \cdot 10^{-7}$	6	0	$5,5201 \cdot 10^{-7}$	—
4	0	$-1,6180 \cdot 10^{-6}$	—	6	1	$-5,6780 \cdot 10^{-8}$	$1,3970 \cdot 10^{-8}$
4	1	$-4,9093 \cdot 10^{-7}$	$-4,5670 \cdot 10^{-7}$	6	2	$3,0690 \cdot 10^{-9}$	$-5,0575 \cdot 10^{-7}$
4	2	$7,6688 \cdot 10^{-8}$	$1,5021 \cdot 10^{-7}$	6	3	$9,1517 \cdot 10^{-11}$	$6,0242 \cdot 10^{-10}$
4	3	$6,2092 \cdot 10^{-8}$	$-7,1254 \cdot 10^{-9}$	6	4	$-3,7866 \cdot 10^{-10}$	$-1,1469 \cdot 10^{-9}$
4	4	$-2,2211 \cdot 10^{-9}$	$7,5348 \cdot 10^{-9}$	6	5	$-1,0899 \cdot 10^{-10}$	$-4,9202 \cdot 10^{-10}$
5	0	$-2,2800 \cdot 10^{-7}$	—	6	6	$-6,7881 \cdot 10^{-12}$	$-6,1337 \cdot 10^{-11}$

2.3. ВЛИЯНИЕ ГАРМОНИК ГЕОПОТЕНЦИАЛА НА ДВИЖЕНИЕ ИСЗ

Рассмотрим возмущения элементов околокруговых орбит, обусловленные гармониками потенциала притяжения Земли. Потенциал возмущающей силы при учете только основной зональной гармоники имеет вид

$$\Delta U = -c_{20} \frac{\mu R_\oplus^2}{2r^3} (3 \sin^2 \varphi - 1). \quad (2.17)$$

Подставляя (2.17) в (2.15) и производя дифференцирование, найдем проекции возмущающего ускорения на оси X_S , Y_T , Z_W :

$$\begin{aligned} \Delta g_{0X_S} &= \frac{3}{2} c_{20} \frac{\mu R_\oplus^2}{r^4} (3 \sin^2 u \sin^2 i - 1), \\ \Delta g_{0Y_T} &= \frac{3}{2} c_{20} \frac{\mu R_\oplus^2}{r^4} \sin 2u \sin^2 i, \\ \Delta g_{0Z_W} &= \frac{3}{2} c_{20} \frac{\mu R_\oplus^2}{r^4} \sin u \sin 2i. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Учитывая (2.18), можно проинтегрировать дифференциальные уравнения движения и определить возмущения в элементах орбиты спутника [36]. Оказывается, что периодические возмущения содержатся во всех элементах околокруговой орбиты. Они являются малыми величинами и, например, для основных элементов квазистационарной орбиты T , e , i , определяющих перемещение спутника относительно поверхности Земли,

в первом приближении с точностью до членов первого порядка имеют вид

$$\begin{aligned}\delta T &= \frac{9}{2} c_{20} \left(\frac{R_\vartheta}{a} \right)^2 T e \cos M, \\ \delta e &= \frac{3}{2} c_{20} \left(\frac{R_\vartheta}{a} \right)^2 \cos M, \\ \delta i &= \frac{3}{4} c_{20} \left(\frac{R_\vartheta}{a} \right)^2 i \cos 2(M + \omega),\end{aligned}\tag{2.19}$$

где a — большая полуось квазистационарной орбиты.

Полагая $R_\vartheta \approx 6378$ км, $a \approx 42164$ км, найдем:

$$\delta T \lesssim 10e, \quad \delta e \lesssim 0,4 \cdot 10^{-4}, \quad \delta i \lesssim 0,2 \cdot 10^{-4}i,$$

где δT вычисляется в секундах.

Вторая зональная гармоника обуславливает вековые возмущения в угловых элементах — долготе восходящего узла Ω , аргументе широты перигея ω и средней аномалии M . Действительно, подставляя соответствующие производные от возмущающей функции (2.17) в уравнения Лагранжа (2.9) и интегрируя их на одном витке, получим

$$\begin{aligned}\Delta\Omega &= -3\pi c_{20} \left(\frac{R_\vartheta}{p} \right)^2 \cos i, \\ \Delta\omega &= \frac{3}{2} \pi c_{20} \left(\frac{R_\vartheta}{p} \right)^2 (5\cos^2 i - 1), \\ \Delta M &= \frac{3}{2} \pi c_{20} \left(\frac{R_\vartheta}{p} \right)^2 (3\cos^2 i - 1) (1 - e^2)^{1/2}.\end{aligned}\tag{2.20}$$

Соотношения (2.20) для стационарной орбиты принимают вид

$$\begin{aligned}\Delta\Omega &\approx -3\pi c_{20} \left(\frac{R_\vartheta}{a} \right)^2, \quad \Delta\omega \approx 6\pi c_{20} \left(\frac{R_\vartheta}{a} \right)^2, \\ \Delta M &\approx 3\pi c_{20} \left(\frac{R_\vartheta}{a} \right)^2.\end{aligned}\tag{2.21}$$

Из приведенных формул видно, что полярное сжатие Земли вызывает вращение линии узлов орбиты с постоянной скоростью в направлении, противоположном направлению движения спутника по орбите (рис. 2.3). Это движение, называемое в дальнейшем регрессией, происходит тем быстрее, чем меньше наклонение орбиты и для стационарной орбиты составляет $4,89^\circ$ за год. Перигей орбиты также перемещается с постоянной скоростью, зависящей от наклонения, по направлению орбитального полета спутника (рис. 2.4).

Для стационарной орбиты увеличение аргумента широты перигея происходит вдвое быстрее уменьшения долготы восходящего узла, в результате чего линия апсид поворачивается