contient, ainsi que toutes les pierres de ce genre que j'ai jusqu'ici examinées, une quantité remarquable de terre alumineuse & de fer. 4.° Que c'est au fer minéralisé avec le schiste, qu'est due la couleur verte qui distingue le marbre dont je parle;

Quant aux portions de marbre rouge qui se rencontrent dans le marbre vert, nous avons vû qu'elles doivent leur couleur à un safran de Mars, dispersé sous la forme d'une poudre fine entre toutes les parties de la terre calcaire; d'où il faut conclure que le fer qui est uni au Marbre de Campan, s'y trouve dans deux états très-différens. Dans le marbre vert il est minéralisé avec le schiste, de manière qu'il a conservé la propriété d'être entièrement dissous par les acides, sans en excepter même celui de nitre, qui, comme on sait, n'a pas d'action sur le fer déflogistiqué : dans le marbre rouge au contraire, ce métal est dans un état de safran de Mars ou de chaux martiale, qui, dispersée entre toutes les parties de la terre calcaire, leur communique sa couleur en leur adhérant fortement, mais sans avoir subi avec elle de combinaison intime : ce safran de Mars n'est point du tout soluble dans l'acide nitreux, & par-là le Chimiste trouve un moyen sûr & facile de le séparer entièrement de la terre calcaire, sous sa forme pulvérulente & sans altérer sa couleur, ainsi qu'il est prouvé par le second de mes Procédés.

Quand on traite notre marbre rouge avec l'acide vitriolique, il n'est pas possible de séparer & de mettre, pour ainsi dire, à nu le safran de Mars; il perd, à la vérité, son adhérence à la terre calcaire; mais comme celle-ci se change, par sa combinaison avec l'acide, en un sel qui cristallise à l'instant même de sa formation, le safran de Mars recouvrant son état pulvérulent, se mêle entre les parties du nouveau corps salin, & lui communique cette teinte rouge qu'on remarque dans le sel vitriolico-calcaire, obtenu par le quatrième Procédé.

Telles sont les expériences que j'ai faites sur le Marbre de Campan; telles sont les conséquences que j'en ai tirées : je soumets les unes & les autres au jugement de l'Académie.

RECHERCHES
SUR
L'ATTRACTION
DES
SPHÉROÏDES HOMOGÈNES,

Par M. LE GENDRE.

M. Maclaurin est le premier qui ait déterminé l'attraction d'un Sphéroïde elliptique pour les points situés dans son intérieur ou à sa surface. Les propositions qu'il a établies à ce sujet, & d'où résulte une solution si simple du problème de la figure de la Terre, servent de base à son excellente Pièce sur le Flux & le Reflux de la Mer, & sont connues de tous les Géomètres. Le même Auteur a considéré aussi l'attraction des Sphéroïdes elliptiques sur les points situés au dehors; mais il s'est borné aux points situés sur l'axe ou sur l'équateur pour les Sphéroïdes de révolution, & seulement aux points placés dans la direction d'un des trois axes, lorsque le Sphéroïde a toutes ses coupes elliptiques. Ces deux objets se trouvent compris dans un théorème remarquable, dont M. Maclaurin donne l'énoncé, art. 653 de son Traité des Fluxions; théorême dont MM. d'Alembert & de la Grange ont donné depuis la démonstration; le premier, dans les Mémoires de Berlin, année 1774, & dans le tome VII de ses Opuscules; le second, dans les Mémoires de Berlin, année 1775.

Il ne paroît pas que les Géomètres aient poussé plus loin leurs recherches sur cette matière intéressante; car, quoique M. de la Grange ait considéré le problême dans toute sa généralité (Mém. de Berlin, année 1773), l'intégration n'a réussi à ce grand Géomètre que dans les cas déjà résolus par M. Maclaurin. C'est dans la vûe de concourir à la perfection de cette théorie, que j'ai entrepris les Recherches dont je vais rendre compte.

Pour reprendre cette matière au point où M. Maclaurin l'a laissée, je commence par donner une démonstration nouvelle du théorême déjà cité. Ma méthode paroît avoir l'avantage d'être directe, & de conduire à une expression fort simple de la valeur absolue de l'attraction.

Je considère ensuite l'attraction d'un Sphéroïde de révolution sur un point quelconque situé au dehors, en supposant le méridien de figure quelconque, pourvu que l'équateur le divise en deux parties égales & semblables. Au moyen d'une décomposition analytique, dont la démonstration fait une partie considérable de ce Mémoire, je parviens à un théorême nouveau, suivant lequel l'attraction d'un Sphéroïde étant supposée connue pour les points situés dans le prolongement de son axe, j'en déduis aussi-tôt l'attraction qui a lieu pour tout autre point.

L'application de ce théorême aux Sphéroïdes elliptiques de révolution, conduit à une valeur absolue de l'attraction, aussi simple pour un point quelconque situé au dehors, que pour un point situé à sa surface.

La méthode que j'ai suivie n'étant point applicable aux Sphéroïdes qui ne sont pas de révolution, je n'en ai tiré aucune conclusion pour ceux dont toutes les coupes sont elliptiques. J'ai cependant lieu de croire que, relativement à ces derniers, on peut généraliser ainsi le théorême de M. Maclaurin. *L'attraction d'un tel Sphéroïde sur un point situé au dehors, est égale à celle d'un autre Sphéroïde de même masse, dont les ellipses principales auroient les mêmes foyers, & dont la surface passeroit par le point attiré.* J'aurois pu insérer ici quelques tentatives que j'ai faites pour la démonstration de ce théorême; mais comme elles n'ont pas eu un succès complet, j'ai mieux aimé m'en tenir au simple énoncé.

Démonstration du Théorême de M. Maclaurin.

1. Il s'agit de déterminer l'attraction d'un Sphéroïde, dont toutes les coupes sont elliptiques, sur un point S placé dans le prolongement d'un de ses trois axes à la distance $CS = r$. FIGURE 1.

On sait qu'un tel Sphéroïde a trois axes principaux, perpendiculaires entre eux. J'appelle a le demi-axe CA qui est dans la direction du point S; b & c, les deux autres demi-axes CG & CE. L'équation de la surface du Sphéroïde sera $\frac{xx}{aa} + \frac{yy}{bb} + \frac{zz}{cc} = 1$; x, y, z étant les coordonnées d'un même point, parallèles aux demi-axes a, b, c, & comptées du centre. Ayant fait passer par le point S le plan ACE qu'on peut appeler l'équateur, quoiqu'il soit elliptique, je mène le plan SMl perpendiculaire à l'équateur. Il en résulte la section elliptique LMl, dans le plan de laquelle je mène les rayons infiniment proches Sm, Sm'. Si on imagine ensuite que le plan SMl décrive un angle infiniment petit autour de l'axe SO parallèle à CG, le trapèze MM$'m'm$ décrira une pyramide tronquée, dont l'attraction sur le point S sera $\mathrm{M}m \times d\psi\, d\varphi \cos\varphi$, en appelant l'angle ASL, ψ, & l'angle LSM, φ. Cette attraction agit suivant SM; on aura donc, suivant SC, la force $\mathrm{M}m\, d\psi\, d\varphi \cos^2\varphi \cos\psi$. Substituant la valeur de Mm qu'on tire facilement de la nature du solide, on a l'attraction élémentaire

$$\frac{2\,abc\,d\varphi\,d\psi \cos^2\varphi \cos\psi}{\left(a^2c^2 \sin^2\varphi + a^2b^2 \cos^2\varphi \sin^2\psi + b^2c^2 \cos^2\varphi \cos^2\psi\right) \sqrt{\left[(a^2 - r^2)c^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi (a^2 \sin^2\psi + c^2 \cos^2\psi - r^2 \sin^2\psi)\right]}}$$

qu'il faut intégrer deux fois par rapport à φ & ψ.

2. Cette formule n'eſt point intégrable par rapport à φ, mais elle l'eſt par rapport à ψ. Je lui donne la forme $\frac{M\, d\psi \cos.\psi}{1 + \alpha \sin.^2 \psi} \sqrt{(A^2 - B^2 \sin.^2 \psi)}$; & comme cette différentielle doit être intégrée depuis $\psi = 0$ juſqu'à $\sin. \psi = \frac{A}{B}$, je fais $\sin. \psi = \frac{A}{B} \sin. \zeta$, & j'ai la transformée $\frac{M A^2}{B} \cdot \frac{d\zeta \cos.^2 \zeta}{1 + \frac{A^2 \alpha}{B^2} \sin.^2 \zeta}$ à intégrer depuis $\zeta = 0$ juſqu'à $\zeta = 90^\circ = \frac{1}{2}\pi$. On trouve, par les méthodes connues, l'intégrale $\frac{M B}{\alpha}\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\left(1 + \frac{A^2 \alpha}{B^2}\right)} - \frac{\pi}{2}\right)$. Doublant & ſubſtituant, on aura la différentielle

$$\frac{2\pi a c r}{a^2 - c^2}\, d\varphi \cos.\varphi \left[\sqrt{\left(\frac{c^2 \sin.^2 \varphi + b^2 \cos.^2 \varphi}{a^2 \sin.^2 \varphi + b^2 \cos.^2 \varphi}\right)} - \sqrt{\left(\frac{r^2 + a^2 - c^2}{r^2}\right)}\right]$$

qu'il faut encore intégrer pour toutes les valeurs de φ. Or, en faiſant $\psi = 0$ dans la valeur de $M m$, & égalant cette valeur à zéro, on aura, pour déterminer la limite de φ, $\sin.^2 \varphi = \frac{b^2}{r^2 + b^2 - a^2}$: ſoit donc $\sin. \varphi = \frac{b \sin. \theta}{\sqrt{(r^2 + b^2 - a^2)}}$, on aura, en ſubſtituant, doublant & introduiſant la maſſe du Sphéroïde M à la place de ſon volume $\frac{4\pi a b c}{3}$, ...

$$\frac{3 M r}{(a^2 - c^2)\sqrt{(r^2 + b^2 - a^2)}} \cdot d\theta \cos.\theta \left[\sqrt{\left(\frac{r^2 + b^2 - a^2 + (c^2 - b^2)\sin.^2 \theta}{r^2 + b^2 - a^2 + (a^2 - b^2)\sin.^2 \theta}\right)} - \sqrt{\left(\frac{r^2 + c^2 - a^2}{r^2}\right)}\right],$$

différentielle qui doit être intégrée depuis $\theta = 0$ juſqu'à $\theta = 90^\circ$, pour donner l'attraction en S'.

3. Cette différentielle n'eſt pas intégrable exactement, à moins que deux des quantités a, b, c ne ſoient égales entre elles, ce qui eſt le cas des Sphéroïdes de révolution. Mais une conſéquence très-remarquable, qui ſe déduit de cette formule, c'eſt qu'on peut changer les axes du Sphéroïde, pourvu que les foyers des ellipſes principales ne changent pas, & les attractions de ces différens Sphéroïdes ſeront entre elles comme leurs maſſes. Car les quantités $a^2 - b^2$, $a^2 - c^2$ reſtant les mêmes, il n'y aura de variable, dans la formule précédente,

que la quantité M. C'eſt préciſément en cela que conſiſte le Théorême de M. Maclaurin, dont voici l'énoncé:

Si deux Sphéroïdes ont leurs trois ſections principales décrites des mêmes foyers, leurs attractions ſur un même point ſitué dans le prolongement d'un des trois axes, ſeront entre elles comme leurs maſſes.

4. Pour déterminer maintenant la valeur abſolue de l'attraction, j'obſerve qu'en vertu du Théorême précédent on peut faire $r = a$, puiſque le cas où le point attiré eſt à la ſurface du Sphéroïde, conduit à la ſolution de tous les autres. Cette ſuppoſition réduit ma différentielle à la forme

$$\frac{3 M a}{b(a^2 - c^2)}\, d\theta \cos.\theta \left[\sqrt{\left(\frac{b^2 + (c^2 - b^2)\sin.^2 \theta}{b^2 + (a^2 - b^2)\sin.^2 \theta}\right)} - \frac{c}{a}\right];$$

mais il ſe préſente ici une difficulté dont il eſt bon de donner la ſolution avant d'aller plus loin.

5. Puiſque a eſt le demi-axe du Sphéroïde qui eſt dans la direction du point attiré, & que b & c ſont les deux autres demi-axes, il doit être indifférent de changer b & c l'un dans l'autre, & la valeur de l'attraction doit toujours être la même. Cependant notre formule ne paroît pas ſe prêter à ce changement. Pour examiner la choſe de plus près, je commence par ſimplifier ma différentielle en faiſant

$$\sin.\theta = x$$
$$b^2 = a^2(1 - \beta)$$
$$c^2 = a^2(1 - \gamma),$$

elle devient

$$\frac{3M}{a^2} \cdot \frac{dx}{\gamma\sqrt{(1 - \beta)}}\left[\sqrt{\left(\frac{1 - \beta + (\beta - \gamma)x^2}{1 - \beta + \beta x^2}\right)} - \sqrt{(1 - \gamma)}\right];$$

nouvelle expreſſion où il faut que β & γ ſoient permutables, lorſqu'on aura intégré depuis $x = 0$ juſqu'à $x = 1$. Soit encore $\frac{x^2}{1 - \beta + \beta x^2} = z^2$, on aura $\frac{3M}{a^2}\left[\int \frac{dz\sqrt{(1 - \gamma z^2)}}{\gamma(1 - \beta z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\sqrt{(1 - \gamma)}}{\gamma\sqrt{(1 - \beta)}}\right]$, & l'intégration qui reſte à effectuer doit toujours être priſe entre les limites $z = 0$, $z = 1$. Mais en différenciant la quantité $\frac{z\sqrt{(1-\gamma z^2)}}{\sqrt{(1-\beta z^2)}}$, on a $\frac{dz\sqrt{(1-\gamma z^2)}}{(1-\beta z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\gamma z^2\, dz}{\sqrt{(1-\beta z^2)}.\sqrt{(1-\gamma z^2)}}$;

donc $\int \frac{dz\sqrt{(1-\gamma z^2)}}{(1-\beta z^2)^{\frac{3}{2}}} - \int \frac{\gamma z^2\, dz}{\sqrt{(1-\beta z^2)}.\sqrt{(1-\gamma z^2)}} = \frac{z\sqrt{(1-\gamma z^2)}}{\sqrt{(1-\beta z^2)}}$;

& en prenant ces intégrales depuis $z = 0$ jusqu'à $z = 1$, on aura

$$\int \frac{dz\sqrt{(1-\gamma z^2)}}{(1-\beta z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\sqrt{(1-\gamma)}}{\sqrt{(1-\beta)}} = \gamma \int \frac{z^2\, dz}{\sqrt{(1-\beta z^2)}.\sqrt{(1-\gamma z^2)}};$$

donc l'attraction cherchée sera $\frac{3M}{a^2}\int \frac{z^2\, dz}{\sqrt{(1-\beta z^2)}.\sqrt{(1-\gamma z^2)}}$, quantité où il est clair maintenant que β & γ sont permutables l'une dans l'autre.

6. La formule de l'attraction étant réduite à cette forme très-simple, on effectuera l'intégration en développant le produit

$$z^2\, dz\left(1 + \tfrac{1}{2}\beta z^2 + \tfrac{1.3}{2.4}\beta^2 z^4 + \tfrac{1.3.5}{2.4.6}\beta^3 z^6 + \&c.\right)\left(1 + \tfrac{1}{2}\gamma z^2 + \tfrac{1.3}{2.4}\gamma^2 z^4 + \tfrac{1.3.5}{2.4.6}\gamma^3 z^6 + \&c.\right):$$

or un terme quelconque de ce produit pouvant être représenté par

$$\frac{1.3.5\ldots 2m-1}{2.4.6\ldots\ldots 2m}\beta^m . \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots\ldots 2n}\gamma^n z^{2m+2n+2}\, dz,$$

son intégrale sera

$$\frac{1.3.5\ldots 2m-1}{2.4.6\ldots\ldots 2m} . \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots\ldots 2n} . \frac{\beta^m \gamma^n}{2m+2n+3};$$

donc l'attraction demandée sera exprimée par cette suite dont la loi est manifeste :

$$\frac{3M}{a^2}\left[\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2}.\tfrac{\beta+\gamma}{5} + \tfrac{1.3}{2.4}.\tfrac{\beta^2+\gamma^2}{7} + \tfrac{1.3.5}{2.4.6}.\tfrac{\beta^3+\gamma^3}{9} + \tfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\tfrac{\beta^4+\gamma^4}{11} + \&c.\right.$$
$$+ \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}.\tfrac{\beta\gamma}{7} + \tfrac{1.3}{2.4}.\tfrac{1}{2}.\tfrac{\beta^2\gamma+\beta\gamma^2}{9} + \tfrac{1.3.5}{2.4.6}.\tfrac{1}{2}.\tfrac{\beta^3\gamma+\beta\gamma^3}{11}$$
$$\left. + \tfrac{1.3}{2.4}.\tfrac{1.3}{2.4}.\tfrac{\beta^2\gamma^2}{11}.\right]$$

Telle est l'attraction d'un Sphéroïde elliptique, qui a pour équation $\frac{xx}{aa} + \frac{yy}{bb} + \frac{zz}{cc} = 1$, sur un point placé à l'extrémité du demi-axe

demi-axe a, les quantités β & γ étant $\frac{a^2-b^2}{a^2}$ & $\frac{a^2-c^2}{a^2}$, & pouvant être positives ou négatives à volonté. On en déduit facilement, par le théorême ci-dessus, la valeur de l'attraction pour tout autre point placé dans le prolongement d'un des trois axes à une distance quelconque r du centre. Il suffit de mettre r à la place de a dans la formule précédente, sans changer la valeur des quantités $a^2 - b^2$ & $a^2 - c^2$. On prendra donc $\beta = \frac{a^2-b^2}{r^2}$, $\gamma = \frac{a^2-c^2}{r^2}$, & l'attraction à la distance r, sur le prolongement du demi-axe a, sera

$$\frac{3M}{r^2}\left[\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2}.\tfrac{\beta+\gamma}{5} + \tfrac{1.3}{2.4}.\tfrac{\beta^2+\gamma^2}{7} + \&c.\right].$$

7. Suivant la remarque que nous venons de faire, l'attraction à la distance r sera généralement $\frac{3M}{r^2}\int\frac{z^2\, dz}{\sqrt{(1-\beta z^2)}.\sqrt{(1-\gamma z^2)}}$, les quantités β & γ désignant $\frac{a^2-b^2}{r^2}$ & $\frac{a^2-c^2}{r^2}$. Cette formule devient intégrable lorsque le Sphéroïde est de révolution. Soit, par exemple, $c = a$, on aura $\gamma = 0$, & l'intégrale sera

$\frac{M}{r^2}\left[\frac{\theta - \frac{1}{2}\mathit{fin}.\,2\theta}{\frac{2}{3}\mathit{fin}.^3\theta}\right]$, en prenant l'angle θ tel que $\mathit{fin}.\,\theta = \frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{\text{[illegible]}}$.

Cette formule donne l'attraction d'un point situé dans le plan de l'équateur du Sphéroïde à la distance r du centre.

8. Si, pour le même Sphéroïde dont a est le rayon de l'équateur, & b le demi-axe, on demande l'attraction dans le prolongement de l'axe, il faudra d'abord changer a en b l'un dans l'autre, puis faire $a = c$, ce qui donnera $\beta = \gamma = -\left(\frac{a^2-b^2}{r^2}\right)$. Je prends $\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{r} = \mathit{tang}.\,\lambda$, & la quantité à intégrer devient $\frac{3M}{r^2}\frac{z^2\, dz}{1+z^2\,\mathit{tang}.^2\lambda}$; d'où résulte l'attraction dans le prolongement de l'axe $\frac{M}{r^2}\left[\frac{\mathit{tang}.\,\lambda - \lambda}{\frac{1}{3}\mathit{tang}.^3\lambda}\right]$.

Ces résultats sont parfaitement d'accord avec ceux de M. Maclaurin. Il est inutile d'avertir que les angles θ & λ ne sont réels qu'autant que le Sphéroïde est applati ; s'il étoit alongé, on auroit, dans les formules précédentes, des logarithmes à la place des arcs de cercle.

De l'attraction des Sphéroïdes de révolution, quelle que soit la figure du méridien.

FIGURE 3. 9. Soit BAb le méridien qui passe par le point attiré S ; BC, l'axe du Sphéroïde ; Aa son équateur qui divise le méridien en deux parties égales & semblables AB, Ab. D'un point quelconque M du Sphéroïde, j'abaisse MQ perpendiculaire sur le méridien BAb ; & suivant MQ, je mène les plans triangulaires MQP, MQO perpendiculaires aux droites CB, CS. Je fais CS $= r$, BCS $= \omega$, CM $= z$, BCM $= \psi$, MPQ $= \theta$, MCS $= \mu$, d'où je tire $MS^2 = r^2 - 2rz\, cos.\, \mu + z^2$, & $cos.\, \mu = cos.\, \omega . cos.\, \psi + sin.\, \omega\, sin.\, \psi\, cos.\, \theta$. Cela posé, la particule dM, située en M, exercera sur le point S les deux attractions suivantes dirigées dans le plan du méridien.

Suivant SC . . . . (P) $= \int \frac{(r - z\, cos.\, \mu)\, dM}{(r^2 - 2rz\, cos.\, \mu + z^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Suiv. SV perp. à SC (Q) $= \int \frac{(cos.\, \psi\, sin.\, \omega - cos.\, \omega\, sin.\, \psi\, cos.\, \theta)\, z\, dM}{(r^2 - 2rz\, cos.\, \mu + z^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Quant à l'expression de la particule dM, on peut la faire dépendre de variables bien différentes, & le choix de ces variables contribue beaucoup à faciliter les intégrations. D'après celles que nous avons adoptées pour déterminer la position du point M, savoir z, ψ & θ, on aura $dM = z^2\, dz\, d\theta\, d\psi\, sin.\, \psi$. On commencera donc par intégrer, par rapport à z, depuis le centre jusqu'à la surface du solide ; on prendra ensuite les deux autres intégrales par rapport à θ & ψ entre les limites o & 180°. Nous verrons que les deux premières intégrations, par rapport à z & θ, peuvent s'effectuer sans connoître la figure du méri-

dien, & c'est ce qui conduit au Théorême que nous avons annoncé.

10. Pour évaluer la force (P), je considère d'abord la différentielle $\frac{(r - z\, cos.\, \mu)\, z^2\, dz}{(r^2 - 2rz\, cos.\, \mu + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, & je la réduis ensuite, quoiqu'on la puisse intégrer exactement par les méthodes connues. Mon but est de simplifier par-là les intégrations ultérieures ; d'ailleurs, la méthode des suites n'est pas moins rigoureuse qu'une autre, tant que la loi permet de les continuer sans difficulté aussi loin qu'on veut. J'aurai donc, en rejetant les puissances impaires de z, $\frac{2z^2\, dz}{r^2}\left[1 + 3\,A.\frac{z^2}{r^2} + 5\,B.\frac{z^4}{r^4} + 7\,C.\frac{z^6}{r^6} + \&c.\right]$, & les coëfficiens A, B, C, &c. seront les fonctions suivantes de $cos.\, \mu$,

$$A = \frac{3}{2}\, cos.^2\, \mu - \frac{1}{2}.$$

$$B = \frac{5.7}{2.4}\, cos.^4\, \mu - \frac{3.5}{2.4}\, 2\, cos.^2\, \mu + \frac{1.3}{2.4}.$$

$$C = \frac{7.9.11}{2.4.6}\, cos.^6\, \mu - \frac{5.7.9}{2.4.6}\, 3\, cos.^4\, \mu + \frac{3.5.7}{2.4.6}\, 3\, cos.^2\, \mu - \frac{1.3.5}{2.4.6}.$$

$$D = \frac{9.11.13.15}{2.4.6.8}\, cos.^8\, \mu - \frac{7.9.11.13}{2.4.6.8}\, 4\, cos.^6\, \mu + \frac{5.7.9.11}{2.4.6.8}\, 6\, cos.^4\, \mu$$
$$- \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}\, 4\, cos.^2\, \mu + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\ \&c.$$

L'intégrale de cette suite, prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \pm$ CN, que j'appelle Z, sera . . . .

$$\frac{2Z^3}{r^2}\left[\frac{1}{3} + \frac{3A}{5}.\frac{Z^2}{r^2} + \frac{5B}{7}.\frac{Z^4}{r^4} + \frac{7C}{9}.\frac{Z^6}{r^6} + \&c.\right].$$

11. Nous avons maintenant à intégrer la différentielle

$$\frac{2Z^3}{r^2}\, d\theta\, d\psi\, sin.\, \psi\left[\frac{1}{3} + \frac{3A}{5}.\frac{Z^2}{r^2} + \frac{5B}{7}.\frac{Z^4}{r^4} + \&c.\right]$$

par rapport à θ ; & comme Z est une fonction de ψ seul, donnée par la figure du méridien, il suffira d'intégrer les termes $d\theta$, A$d\theta$, B$d\theta$, &c. entre les limites $\theta = 0$, $\theta = 180°$. On substituera donc, dans les quantités A, B, C, &c. pour $cos.\, \mu$, sa valeur $cos.\, \omega\, cos.\, \psi + sin.\, \omega\, sin.\, \psi\, cos.\, \theta$, & supposant

$$P' = \cos^2 \omega \cos^2 \psi + \frac{2.1}{2.2} \sin^2 \omega \sin^2 \psi.$$

$$P'' = \cos^4 \omega \cos^4 \psi + \frac{4.3}{2.2} \cos^2 \omega \cos^2 \psi \sin^2 \omega \sin^2 \psi + \frac{4.3.2.1}{2.2.4.4} \sin^4 \omega \sin^4 \psi.$$

$$P''' = \cos^6 \omega \cos^6 \psi + \frac{6.5}{2.2} \cos^4 \omega \cos^4 \psi \sin^2 \omega \sin^2 \psi + \frac{6.5.4.3}{2.2.4.4} \cos^2 \omega \cos^2 \psi \sin^4 \omega \sin^4 \psi + \frac{6.5.4.3.2.1}{2.2.4.4.6.6} \sin^6 \omega \sin^6 \psi \text{ \&c.}$$

ensuite

$$A' = \frac{3}{2} P' - \frac{1}{2}.$$

$$B' = \frac{5.7}{2.4} P'' - \frac{3.5}{2.4} 2 P' + \frac{1.3}{2.4}.$$

$$C' = \frac{7.9.11}{2.4.6} P''' - \frac{5.7.9}{2.4.6} 3 P'' + \frac{3.5.7}{2.4.6} 3 P' - \frac{1.3.5}{2.4.6} \text{ \&c.}$$

On aura $\int d\theta = \pi$, $\int A\, d\theta = A'\pi$, $\int B\, d\theta = B'\pi$ &c. & l'intégrale cherchée sera

$$\frac{2\pi Z^3 d\psi \sin.\psi}{r^2} \left[\frac{1}{3} + \frac{3A'}{5} . \frac{Z^2}{r^2} + \frac{5B'}{7} . \frac{Z^4}{r^4} + \text{\&c.} \right].$$

12. Avant de passer à la dernière intégration, je remarque que les quantités A′, B′, C′, &c. peuvent se décomposer en fonctions séparées de ω & de ψ, comme il suit :

$$A' = \left(\frac{3}{2} \cos^2 \omega - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{3}{2} \cos^2 \psi - \frac{1}{2} \right).$$

$$B' = \left(\frac{5.7}{2.4} \cos^4 \omega - \frac{3.5}{2.4} 2 \cos^2 \omega + \frac{1.3}{2.4} \right) \left(\frac{5.7}{2.4} \cos^4 \psi - \frac{3.5}{2.4} 2 \cos^2 \psi + \frac{1.3}{2.4} \right).$$

$$C' = \left(\frac{7.9.11}{2.4.6} \cos^6 \omega - \frac{5.7.9}{2.4.6} 3 \cos^4 \omega + \frac{3.5.7}{2.4.6} 3 \cos^2 \omega - \frac{1.3.5}{2.4.6} \right) \left(\frac{7.9.11}{2.4.6} \cos^6 \psi - \frac{5.7.9}{2.4.6} 3 \cos^4 \psi + \frac{3.5.7}{2.4.6} 3 \cos^2 \psi - \frac{1.3.5}{2.4.6} \right) \text{ \&c.}$$

Ce Théorème algébrique que nous démontrerons plus loin, va nous offrir des conséquences utiles.

13. Soient prises les intégrales suivantes depuis $\psi = 0$ jusqu'à $\psi = 90°$, je les représente par $3M$, $3M\alpha$, $3M\beta$, &c. M étant la masse du Sphéroïde.

$$3M = 4\pi \int Z^3 d\psi \sin.\psi.$$

$$3M\alpha = 4\pi \int Z^5 d\psi \sin.\psi \left(\frac{3}{2} \cos^2 \psi - \frac{1}{2} \right).$$

$$3M\beta = 4\pi \int Z^7 d\psi \sin.\psi \left(\frac{5.7}{2.4} \cos^4 \psi - \frac{3.5}{2.4} . 2 \cos^2 \psi + \frac{1.3}{2.4} \right).$$

$$3M\gamma = 4\pi \int Z^9 d\psi \sin.\psi \left(\frac{7.9.11}{2.4.6} \cos^6 \psi - \frac{5.7.9}{2.4.6} 3 \cos^4 \psi + \frac{3.5.7}{2.4.6} 3 \cos^2 \psi - \frac{1.3.5}{2.4.6} \right) \text{\&c.},$$

& l'attraction (P) dirigée vers le centre du Sphéroïde, sera exprimée par cette formule très-simple :

$$(P) = \frac{3M}{r^2} \left[\frac{1}{3} + \frac{3\alpha}{5r^2} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \omega - \frac{1}{2} \right) + \frac{5\beta}{7r^4} \left(\frac{5.7}{2.4} \cos^4 \omega - \frac{3.5}{2.4} . 2 \cos^2 \omega + \frac{1.3}{2.4} \right) + \frac{7\gamma}{9r^6} \left(\frac{7.9.11}{2.4.6} \cos^6 \omega - \frac{5.7.9}{2.4.6} 3 \cos^4 \omega + \frac{3.5.7}{2.4.6} . 3 \cos^2 \omega - \frac{1.3.5}{2.4.6} \right) + \text{\&c.} \right],$$

dans laquelle les quantités α, β, γ, &c. ne dépendent que de la figure du méridien.

14. Par des calculs semblables, on détermineroit la force (Q) en intégrant trois fois la quantité

$$\frac{\zeta (\sin.\omega \cos.\psi - \cos.\omega \sin.\psi \cos.\theta)\, \zeta\, dM}{(r^2 - 2r\zeta \cos.\mu + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}},$$

mais on y parvient bien plus facilement à l'aide d'un Théorème que M. de la Place a bien voulu me communiquer : voici en quoi il consiste.

Soit V la somme des particules du corps, divisées par leurs distances au point attiré, c'est-à-dire $V = \int \frac{dM}{(r^2 - 2r\zeta \cos.\mu + \zeta^2)^{\frac{1}{2}}}$.

Cette seule intégrale suffira pour déterminer, par ses différences partielles, les deux forces (P) & (Q), & on en conclura

$$(P) = -\frac{dV}{dr}, \quad (Q) = -\frac{1}{r} \cdot \frac{dV}{d\omega}.$$

Ce Théorême se démontre facilement par la différentiation sous le signe, en observant que

$$\frac{d \cos. \mu}{d\omega} = \frac{d(\cos. \omega \cos. \psi + \sin. \omega \sin. \psi \cos. \theta)}{d\omega} = -\sin. \omega \cos. \psi + \cos. \omega \sin. \psi \cos. \theta,$$

d'où résulte

$$-\frac{dV}{dr} = \int \frac{(r - z \cos. \mu)\, dM}{(r^2 - 2rz \cos. \mu + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$-\frac{1}{r} \cdot \frac{dV}{d\omega} = \int \frac{(\sin. \omega \cos. \psi - \cos. \omega \sin. \psi \cos. \theta)\, z\, dM}{(r^2 - 2rz \cos. \mu + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

valeurs qui sont précisément celles des forces (P) & (Q).

15. De ce que $(P) = -\frac{dV}{dr}$, on tire facilement

$$V = \frac{3M}{r}\left[\frac{1}{3} + \frac{\alpha}{5r^2}\left(\frac{3}{2}\cos.^2\omega - \frac{1}{2}\right) + \frac{\beta}{7r^4}\left(\frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4}\cos.^4\omega - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4}\, 2\cos.^2\omega + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right) + \&c.\right],$$

& puisque $(Q) = -\frac{1}{r} \cdot \frac{dV}{d\omega}$, nous aurons

$$\begin{aligned}(Q) = \frac{3M}{r^2} \sin. \omega \cos. \omega \Big[& \frac{\alpha}{5r^2} \cdot 3 + \frac{\beta}{7r^4}\left(\frac{5 \cdot 7}{2}\cos.^2\omega - \frac{3 \cdot 5}{2}\right) \\ & + \frac{\gamma}{9r^6}\left(\frac{7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4}\cos.^4\omega - \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4}\, 2\cos.^2\omega + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4}\right) \\ & + \frac{\delta}{11r^8}\Big(\frac{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15}{2 \cdot 4 \cdot 6}\cos.^6\omega - \frac{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}{2 \cdot 4 \cdot 6}\, 3\cos.^4\omega \\ & + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6}\, 3\cos.^2\omega - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6}\Big) + \&c. \Big].\end{aligned}$$

16. Ces formules font voir que si on connoît l'attraction pour un point situé sur l'axe du Sphéroïde, on en déduira facilement les deux attractions qui ont lieu pour tout autre point. En effet, que l'attraction pour un point situé sur l'axe à la distance r du centre, soit donnée par la formule

$$\frac{M}{r^2}\left[1 + \frac{A}{r^2} + \frac{B}{r^4} + \frac{C}{r^6} + \&c.\right],$$

& les deux forces (P) & (Q) auxquelles se réduit l'attraction

du Sphéroïde sur un point quelconque, auront pour valeurs

$$\begin{aligned}(P) = \frac{M}{r^2}\Big[& 1 + \frac{A}{r^2}\left(\frac{3}{2}\cos.^2\omega - \frac{1}{2}\right) + \frac{B}{r^4}\left(\frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4}\cos.^4\omega - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4}\, 2\cos.^2\omega + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right) \\ & + \frac{C}{r^6}\left(\frac{7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6}\cos.^6\omega - \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6}\, 3\cos.^4\omega + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6}\, 3\cos.^2\omega - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right) + \&c.\Big].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(Q) = \frac{M \sin. \omega \cos. \omega}{r^2}\Big[& \frac{A}{r^2} + \frac{B}{5r^4}\left(\frac{5 \cdot 7}{2}\cos.^2\omega - \frac{3 \cdot 5}{2}\right) + \frac{C}{7r^6}\Big(\frac{7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4}\cos.^4\omega - \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4}\, 2\cos.^2\omega \\ & + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4}\Big) + \frac{D}{9r^8}\Big(\frac{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15}{2 \cdot 4 \cdot 6}\cos.^6\omega - \frac{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}{2 \cdot 4 \cdot 6}\, 3\cos.^4\omega \\ & + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6}\, 3\cos.^2\omega - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6}\Big) + \&c.\Big].\end{aligned}$$

Cela suppose que lorsque $\omega = 0$, les quantités $\frac{3}{2}\cos.^2\omega - \frac{1}{2}$, $\frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4}\cos.^4\omega - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4}\, 2\cos.^2\omega + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}$, &c. sont égales à l'unité; on peut le démontrer de plusieurs manières, & notamment par la théorie des différences.

17. Si on aime mieux exprimer l'attraction pour un point quelconque par deux forces X & Y parallèles à l'axe & à l'équateur, il faudra substituer les valeurs de (P) & de (Q) dans les formules $X = (P) \cos. \omega - (Q) \sin. \omega$ & $Y = (P) \sin. \omega + (Q) \cos. \omega$, & on trouvera

$$\begin{aligned}X = \frac{M \cos. \omega}{r^2}\Big[& \frac{A}{r^2}\left(\frac{5}{2}\cos.^2\omega - \frac{3}{2}\right) + \frac{B}{r^4}\left(\frac{7 \cdot 9}{2 \cdot 4}\cos.^4\omega - \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4}\, 2\cos.^2\omega + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4}\right) \\ & + \frac{C}{r^6}\left(\frac{9 \cdot 11 \cdot 13}{2 \cdot 4 \cdot 6}\cos.^6\omega - \frac{7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6}\, 3\cos.^4\omega + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6}\, 3\cos.^2\omega - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right) + \&c.\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Y = \frac{M \sin. \omega}{r^2}\Big[& 1 + \frac{A}{3r^2}\left(\frac{3 \cdot 5}{2}\cos.^2\omega - \frac{1 \cdot 3}{2}\right) + \frac{B}{5r^4}\left(\frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4}\cos.^4\omega - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4}\, 2\cos.^2\omega + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4}\right) \\ & + \frac{C}{7r^6}\Big(\frac{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}{2 \cdot 4 \cdot 6}\cos.^6\omega - \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6}\, 3\cos.^4\omega + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6}\, 3\cos.^2\omega \\ & - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6}\Big) + \&c.\Big].\end{aligned}$$

Application du Théorême de l'art. 16 aux Sphéroïdes elliptiques de révolution.

18. Nous avons trouvé (art. 8.) que l'attraction d'un point

situé dans le prolongement de l'axe, étoit $\frac{M}{r^2}\left[\frac{tang.\,\lambda - \lambda}{\frac{1}{3}\,tang.^3\,\lambda}\right]$, en supposant $tang.\,\lambda = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{r}$. Réduisant cette quantité ensuite, & faisant $a^2 - b^2 = c^2$, on aura

$$\frac{M}{r^2}\left[1 - \frac{3}{5}\cdot\frac{c^2}{r^2} + \frac{3}{7}\cdot\frac{c^4}{r^4} - \frac{3}{9}\cdot\frac{c^6}{r^6} + \&c.\right];$$

donc les deux attractions X & Y, pour un point quelconque, seront

$$X = \frac{M\,cos.\,\omega}{r^2}\left[1 - \frac{3}{5}\cdot\frac{c^2}{r^2}\left(\frac{5}{2}cos.^2\,\omega - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{7}\cdot\frac{c^4}{r^4}\left(\frac{7.9}{2.4}cos.^4\,\omega - \frac{5.7}{2.4}\,2\,cos.^2\,\omega + \frac{3.5}{2.4}\right) - \&c.\right].$$

$$Y = \frac{M\,sin.\,\omega}{r^2}\left[1 - \frac{3}{5}\cdot\frac{c^2}{3\,r^2}\left(\frac{3.5}{2}cos.^2\,\omega - \frac{1.3}{2}\right) + \frac{3}{7}\cdot\frac{c^4}{5\,r^4}\left(\frac{5.7.9}{2.4}cos.^4\,\omega - \frac{3.5.7}{2.4}\,2\,cos.^2\,\omega + \frac{1.3.5}{2.4}\right) - \&c.\right].$$

La loi de ces expressions permet de les continuer aussi loin qu'on veut ; mais comme elles ne contiennent d'autre fonction de a & de b que c^2 ou $a^2 - b^2$ qui est le carré de l'excentricité, on en tire une propriété très-remarquable, qui donne bientôt les valeurs de X & Y en termes finis :

Si un même point est attiré par deux Sphéroïdes dont les ellipses génératrices ont les mêmes foyers, les attractions de ces Sphéroïdes auront la même direction, & seront entre elles comme leurs masses.

FIGURE 2. 19. On peut donc substituer au Sphéroïde B A b un autre Sphéroïde de même masse β S α qui passe par le point S, & l'attraction sera la même dans les deux cas. Il faut seulement que les deux ellipses B A b, $\beta\,\alpha\,\beta'$ soient décrites des mêmes foyers, & qu'elles fassent leur révolution autour de la même ligne C β. Soit α l'attraction du Sphéroïde β S α au point α de son équateur, & β son attraction au pôle, on aura, suivant les principes de M. Maclaurin, les deux attractions du point S dans les directions S D & S E.

$$X = \frac{CE}{C\beta}\cdot\beta,\quad Y = \frac{CD}{Ca}\cdot\alpha.$$

Pour avoir ces valeurs analytiquement, je suppose, comme le représente

représente la Figure, que A a est le grand axe de l'ellipse B A b, & F l'un de ses foyers, qui sera aussi celui de l'ellipse β S α. J'appelle C a, A ; C β, B, & j'ai les deux équations

$$A^2 - B^2 = a^2 - b^2 = c^2,$$

$$r^2\,sin.^2\,\omega = \frac{A^2}{B^2}\left(B^2 - r^2\,cos.^2\,\omega\right),$$

d'où l'on tire

$$A = \sqrt{\left[\frac{r^2 + c^2 + \sqrt{(r^4 + 2\,r^2\,c^2\,cos.\,2\,\omega + c^4)}}{2}\right]}.$$

$$B = \sqrt{\left[\frac{r^2 - c^2 + \sqrt{(r^4 + 2\,r^2\,c^2\,cos.\,2\,\omega + c^4)}}{2}\right]}.$$

J'appelle l'angle β C F, λ, ce qui donne $tang.\,\lambda = \frac{C}{B}$, $sin.\,\lambda = \frac{C}{A}$. Les attractions α & β sont donc, par les formules des art. 7 & 8,

$$\alpha = \frac{M}{A^2}\left(\frac{\lambda - \frac{1}{2}\,sin.\,2\,\lambda}{\frac{2}{3}\,sin.^3\,\lambda}\right)$$

$$\beta = \frac{M}{B^2}\left(\frac{tang.\,\lambda - \lambda}{\frac{1}{3}\,tang.^3\,\lambda}\right),$$

d'où l'on déduit les deux attractions X & Y au point S en termes finis, savoir :

$$X = \frac{3\,M\,r\,cos.\,\omega}{c^3}\left(tang.\,\lambda - \lambda\right).$$

$$Y = \frac{3\,M\,r\,sin.\,\omega}{2\,c^3}\left(\lambda - \frac{1}{2}\,sin.\,2\,\lambda\right).$$

20. Si nous avions voulu trouver directement l'attraction des Sphéroïdes elliptiques, sans connoître l'attraction dans le prolongement de l'axe, il auroit fallu effectuer les intégrations de l'art. 13. Or la valeur de Z^2 ou CN^2 est dans ce cas $\frac{a^2\,b^2}{b^2 + c^2\,cos.^2\,\psi}$ ou $\frac{c^2\,(1 + k)}{k\,(1 + k\,cos.^2\,\psi)}$, en faisant $c^2 = b^2\,k$; & comme k doit disparoître dans les quantités α, β, γ, &c. il auroit fallu démontrer que les intégrales suivantes, prises depuis $\psi = 0$ jusqu'à $\psi = 90°$, sont indépendantes de k.

$$\int \frac{(1+k)^{\frac{1}{2}}}{(1+k\,\text{cof.}^2\,\psi)^{\frac{3}{2}}}.\,d\psi\,\text{fin.}\,\psi.$$

$$\int \frac{(1+k)^{\frac{3}{2}}}{k\,(1+k\,\text{cof.}^2\,\psi)^{\frac{5}{2}}}.\,d\psi\,\text{fin.}\,\psi\left(\frac{3}{2}\,\text{cof.}^2\,\psi-\frac{1}{2}\right).$$

$$\int \frac{(1+k)^{\frac{5}{2}}}{k^2\,(1+k\,\text{cof.}^2\,\psi)^{\frac{7}{2}}}.\,d\psi\,\text{fin.}\,\psi\left(\frac{5.7}{2.4}\,\text{cof.}^4\psi-\frac{3.5}{2.4}\,2\,\text{cof.}^2\,\psi+\frac{1.3}{2.4}\right).$$

$$\int \frac{(1+k)^{\frac{7}{2}}}{k^3\,(1+k\,\text{cof.}^2\,\psi)^{\frac{9}{2}}}.\,d\psi\,\text{fin.}\,\psi\left(\frac{7.9.11}{2.4.6}\,\text{cof.}^6\psi-\frac{5.7.9}{2.4.6}\,3\,\text{cof.}^4\psi+\frac{3.5.7}{2.4.6}\,3\,\text{cof.}^2\,\psi-\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)\ \text{\&c.}$$

On trouve en effet que, pour l'identité de nos résultats, ces intégrales doivent être respectivement $+1$, $-\frac{1}{3}$, $+\frac{1}{5}$, $-\frac{1}{7}$, &c. C'est ce qu'on trouveroit aussi par l'intégration immédiate.

Démonstration du Théorême algébrique de l'art. 12.

21. La théorie précédente ne feroit fondée que fur une induction peu fatisfaifante, fi nous n'ajoutions pas la démonftration rigoureufe du Théorême algébrique qui lui fert de bafe. Mettons d'abord fous les yeux l'objet de la queftion, en la confidérant d'une manière purement analytique.

Les quantités P′, P″, P‴, &c. étant formées fuivant cette loi,

$$P' = x^2y^2+\frac{2.1}{2.2}(1-x^2)(1-y^2).$$

$$P'' = x^4y^4+\frac{4.3}{2.2}x^2y^2(1-x^2)(1-y^2)+\frac{4.3.2.1}{2.2.4.4}(1-x^2)^2(1-y^2)^2.$$

$$P''' = x^6y^6+\frac{6.5}{2.2}x^4y^4(1-x^2)(1-y^2)+\frac{6.5.4.3}{2.2.4.4}x^2y^2(1-x^2)^2(1-y^2)^2$$
$$+\frac{6.5.4.3.2.1}{2.2.4.4.6.6}(1-x^2)^3(1-y^2)^3\ \text{\&c.}$$

on en compofe les quantités A′, A″, A‴, &c. fuivant cette nouvelle loi.

$$A' = \frac{3}{2}.\,P'-\frac{1}{2}.$$

$$A'' = \frac{5.7}{2.4}\,P''-\frac{3.5}{2.4}\,2\,P'+\frac{1.3}{2.4}.$$

$$A''' = \frac{7.9.11}{2.4.6}.\,P'''-\frac{5.7.9}{2.4.6}.\,3\,P''+\frac{3.5.7}{2.4.6}.\,3\,P'-\frac{1.3.5}{2.4.6}.$$

$$A^{\text{IV}} = \frac{9.11.13.15}{2.4.6.8}.\,P^{\text{IV}}-\frac{7.9.11.13}{2.4.6.8}.\,4\,P'''+\frac{5.7.9.11}{2.4.6.8}.\,6\,P''$$
$$-\frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}.\,4\,P'+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8},\ \text{\&c.}$$

Il faut démontrer que ces quantités A′, A″, A‴, &c. feront décompofables chacune en deux fonctions féparées de x & de y, & femblables entre elles, de forte qu'on aura

$$A' = \left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}y^2-\frac{1}{2}\right).$$

$$A'' = \left(\frac{5.7}{2.4}x^4-\frac{3.5}{2.4}\,2\,x^2+\frac{1.3}{2.4}\right)\left(\frac{5.7}{2.4}y^4-\frac{3.5}{2.4}\,2\,y^2+\frac{1.3}{2.4}\right).$$

$$A''' = \left(\frac{7.9.11}{2.4.6}x^6-\frac{5.7.9}{2.4.6}\,3\,x^4+\frac{3.5.7}{2.4.6}\,3\,x^2-\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)\left(\frac{7.9.11}{2.4.6}y^6\right.$$
$$\left.-\frac{5.7.9}{2.4.6}\,3\,y^4-\frac{3.5.7}{2.4.6}\,3\,y^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}\right),\ \text{\&c.}$$

On peut prouver d'abord que la décompofition des quantités A′, A″, &c. ne peut pas fe faire autrement fi elle eft poffible. Car en admettant qu'elles puiffent fe partager ainfi en deux fonctions, l'une de x feule, l'autre de y feule, ces deux fonctions doivent être femblables, puifque x & y entrent également dans les quantités P′, P″, P‴, &c. Elles ont de plus la forme que nous leur avons donnée; car en faifant $y=1$, A‴, par exemple, devient

$$\frac{7.9.11}{2.4.6}\,x^6-\frac{5.7.9}{2.4.6}.\,3\,x^4+\frac{3.5.7}{2.4.6}\,3\,x^2-\frac{1.3.5}{2.4.6}.$$

Cette quantité doit donc être facteur de A‴ dans notre hypothèfe; & l'autre facteur fera

$$\frac{7.9.11}{2.4.6}\,y^6-\frac{5.7.9}{2.4.6}\,3\,y^4+\frac{3.5.7}{2.4.6}\,3\,y^2-\frac{1.3.5}{2.4.6}.$$

Il refte à voir fi le produit de ces deux facteurs donne exactement la quantité A''', ou s'il ne faut pas les multiplier encore par une quantité constante. Mais on s'assure que cette constante n'a pas lieu, & que le produit est exact, en observant que la quantité $\frac{7.9.11}{2.4.6} - \frac{5.7.9}{2.4.6}.3 + \frac{3.5.7}{2.4.6}.3 - \frac{1.3.5}{2.4.6}$ qu'on a en faisant x & y égales à l'unité, & toutes celles de la même forme sont égales à l'unité, comme nous l'avons déjà dit (art. 16).

22. Il faut donc prouver que chacune des quantités A', A'', A''', &c. est de la forme XY, X étant une fonction de x seule, & Y une fonction semblable de y. Pour simplifier le calcul, à la place de x^2 & de y^2, je mets $\frac{x^2}{1+x^2}$ & $\frac{y^2}{1+y^2}$, & négligeant les dénominateurs communs, je fais de nouveau

$$P' = x^2 y^2 + \frac{2.1}{2.2}$$

$$P'' = x^4 y^4 + \frac{4.3}{2.2} x^2 y^2 + \frac{4.3.2.1}{2.2.4.4}.$$

$$P''' = x^6 y^6 + \frac{6.5}{2.2} x^4 y^4 + \frac{6.5.4.3}{2.2.4.4} x^2 y^2 + \frac{6.5.4.3.2.1}{2.2.4.4.6.6} \text{ \&c.}$$

d'où je forme les quantités

$$A' = \frac{3}{2} P' - \frac{1}{2}(1+x^2)(1+y^2).$$

$$A'' = \frac{5.7}{2.4} P'' - \frac{3.5}{2.4} 2 P'(1+x^2)(1+y^2) + \frac{1.3}{2.4}(1+x^2)^2(1+y^2)^2.$$

$$A''' = \frac{7.9.11}{2.4.6} P''' - \frac{5.7.9}{2.4.6} 3 P''(1+x^2)(1+y^2)$$
$$+ \frac{3.5.7}{2.4.6} 3 P'(1+x^2)^2(1+y^2)^2$$
$$- \frac{1.3.5}{2.4.6}(1+x^2)^3(1+y^2)^3 \text{ \&c.}$$

Or si ces quantités sont décomposables, comme nous voulons le démontrer, on verra facilement, comme ci-dessus, que la décomposition ne peut avoir lieu que de la manière suivante.

$$A' = \left(x^2 - \frac{2.1}{2.2}\right)\left(y^2 - \frac{2.1}{2.2}\right).$$

$$A'' = \left(x^4 - \frac{4.3}{2.2}x^2 + \frac{4.3.2.1}{2.2.4.4}\right)\left(y^4 - \frac{4.3}{2.2}y^2 + \frac{4.3.2.1}{2.2.4.4}\right).$$

$$A''' = \left(x^6 - \frac{6.5}{2.2}x^4 + \frac{6.5.4.3}{2.2.4.4}x^2 - \frac{6.5.4.3.2.1}{2.2.4.4.6.6}\right)\left(y^6 - \frac{6.5}{2.2}y^4\right.$$
$$\left. + \frac{6.5.4.3}{2.2.4.4}y^2 - \frac{6.5.4.3.2.1}{2.2.4.4.6.6}\right) \text{ \&c.}$$

Ce Théorême est renfermé dans le suivant, qui paroît plus facile à démontrer.

Soit $xy = p$, $(1+x^2)(1+y^2) = q$, & soient prises les quantités P^0, P^1, P^2, &c. puis A^1, A^2, A^3, &c. (où les nombres 0, 1, 2, 3, &c. désignent des quantièmes & non des exposans) suivant cette loi.

$$P^0 = 1.$$

$$P^1 = p.$$

$$P^2 = p^2 + \frac{2.1}{2.2}.$$

$$P^3 = p^3 + \frac{3.2}{2.2} p.$$

$$P^4 = p^4 + \frac{4.3}{2.2} p^2 + \frac{4.3.2.1}{2.2.4.4}.$$

$$P^5 = p^5 + \frac{5.4}{2.2} p^3 + \frac{5.4.3.2}{2.2.4.4} p.$$

$$P^6 = p^6 + \frac{6.5}{2.2} p^4 + \frac{6.5.4.3}{2.2.4.4} p^2 + \frac{6.5.4.3.2.1}{2.2.4.4.6.6}$$

&c.

$$A^1 = P^1.$$

$$A^2 = \frac{3}{2} P^2 - \frac{1}{2} q P^0.$$

$$A^3 = \frac{5}{2} P^3 - \frac{3}{2} q P^1.$$

$$A^4 = \frac{5.7}{2.4} P^4 - \frac{3.5}{2.4}.2 q P^2 + \frac{1.3}{2.4} q^2 P^0.$$

$$A^5 = \frac{7.9}{2.4} P^5 - \frac{5.7}{2.4}.2 q P^3 + \frac{3.5}{2.4} q^2 P^1.$$

$$A^6 = \frac{7.9.11}{2.4.6} P^6 - \frac{5.7.9}{2.4.6} 3 q P^4 + \frac{3.5.7}{2.4.6} 3 q^2 P^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6} q^3 P^0.$$

$$A^7 = \frac{9.11.13}{2.4.6} P^7 - \frac{7.9.11}{2.4.6} 3 q P^5 + \frac{5.7.9}{2.4.6} 3 q^2 P^3 - \frac{3.5.7}{2.4.6} q^3 P^1 \text{ \&c.}$$

Je dis qu'on aura

$$A^1 = x\,y.$$

$$A^2 = \left(x^2 - \frac{2.1}{2.2}\right)\left(y^2 - \frac{2.1}{2.2}\right).$$

$$A^3 = \left(x^3 - \frac{3.2}{2.2}x\right)\left(y^3 - \frac{1.2}{2.2}y\right).$$

$$A^4 = \left(x^4 - \frac{4.3}{2.2}x^2 + \frac{4.3.2.1}{2.2.4.4}\right)\left(y^4 - \frac{4.3}{2.2}y^2 + \frac{4.3.2.1}{2.2.4.4}\right).$$

$$A^5 = \left(x^5 - \frac{5.4}{2.2}x^3 + \frac{5.4.3.2}{2.2.4.4}x\right)\left(y^5 - \frac{5.4}{2.2}y^3 + \frac{5.4.3.2}{2.2.4.4}y\right).$$

$$A^6 = \left(x^6 - \frac{6.5}{2.2}x^4 + \frac{6.5.4.3}{2.2.4.4}x^2 - \frac{6.5.4.3.2.1}{2.2.4.4.6.6}\right)\left(y^6 - \frac{6.5}{2.2}y^4 + \frac{6.5.4.3}{2.2.4.4}y^2 - \frac{6.5.4.3.2.1}{2.2.4.4.6.6}\right) \text{ \&c.}$$

23. Si cette décompoſition eſt vraie en général, on aura $\frac{dd(A^n)}{dx\,dy} = n^2 A^{n-1}$, comme il eſt facile de voir à l'inſpection des facteurs précédens. Nous ferons voir d'abord que cette équation a lieu; nous prouverons enſuite que la décompoſition de A^n en eſt une ſuite néceſſaire.

La quantité A^n peut être repréſentée par la ſuite

$$A^n = a\,P^n - b\,P^{n-2}q + c\,P^{n-4}q^2 - f\,P^{n-6}q^3 + g\,P^{n-8}q^4 - \text{\&c.}$$

dans laquelle a, b, c, f, &c. ſont des fonctions connues de n. Je différencie cette équation deux fois de ſuite; la première, par rapport à x; la ſeconde, par rapport à y, & j'obſerve que par la nature des quantités P^1, P^2, &c. on a $\frac{d(P^n)}{dp} = n\,P^{n-1}$; d'ailleurs $\frac{dp}{dx} = y$, $\frac{dp}{dy} = x$, $\frac{dq}{dx} = 2x(1+y^2)$, $\frac{dq}{dy} = 2y(1+x^2)$. On aura donc

$$\begin{aligned}\frac{dd(A^n)}{dx\,dy} = {} & n\,a\,P^{n-1} - 3(n-2)\,b\,P^{n-3}q + 5(n-4)\,c\,P^{n-5}q^2 - 7(n-6)\,f\,P^{n-7}q^3 + \text{\&c.} \\ & + p\left\{\begin{aligned}& n(n-1)\,a\,P^{n-2} - (n-2)(n-3)\,b\,P^{n-4}q + (n-4)(n-5)\,c\,P^{n-6}q^2 - \text{\&c.} \\ & \quad - 4\,b\,P^{n-2} + 16\,c\,P^{n-4}q \ldots\ldots - 36\,f\,P^{n-6}q^2 \ldots\ldots + \text{\&c.}\end{aligned}\right\} \\ & - 2(p^2-1)\left[(n-2)\,b\,P^{n-3} - 2(n-4)\,c\,P^{n-5}q + 3(n-6)\,f\,P^{n-7}q^2 - \text{\&c.}\right]\end{aligned}$$

Comme il s'agit de réduire cette quantité à la forme $n^2 A^{n-1}$ que l'on peut repréſenter par

$$n^2(a'\,P^{n-1} - b'\,P^{n-3}q + c'\,P^{n-5}q^2 - \text{\&c.}),$$

on voit qu'une telle réduction ne pourroit avoir lieu, ſi on n'avoit pas en général

$$P^n = \alpha\,P^{n-1}p + \beta\,P^{n-2}(p^2 - 1);$$

α & β étant fonctions de n ſeul. Pour examiner ſi on a en effet une ſemblable équation, je reprends les valeurs générales de P^n, P^{n-1}, P^{n-2} qui ſont

$$P^n = p^n + \frac{n.\,n-1}{2.2}p^{n-2} + \frac{n.\,n-1.\,n-2.\,n-3}{2.2.4.4}p^{n-4} + \frac{n.\,n-1.\,n-2.\,n-3.\,n-4.\,n-5}{2.2.4.4.6.6}p^{n-6} + \text{\&c.}$$

$$P^{n-1} = p^{n-1} + \frac{n-1.\,n-2}{2.2}p^{n-3} + \frac{n-1.\,n-2.\,n-3.\,n-4}{2.2.4.4}p^{n-5} + \frac{n-1.\,n-2.\,n-3.\,n-4.\,n-5.\,n-6}{2.2.4.4.6.6}P^{n-7} + \text{\&c.}$$

$$P^{n-2} = p^{n-2} + \frac{n-2.\,n-3}{2.2}p^{n-4} + \frac{n-2.\,n-3.\,n-4.\,n-5}{2.2.4.4}p^{n-6} + \frac{n-2.\,n-3.\,n-4.\,n-5.\,n-6.\,n-7}{2.2.4.4.6.6}p^{n-8} + \text{\&c.}$$

& je les ſubſtitue dans l'équation précédente. Il faut, pour qu'elle devienne identique, qu'on ſatisfaſſe à différentes conditions, qui ſont toutes repréſentées par l'équation,

$$(n-1)(n-2k)\alpha + (n-2k)(n-2k-1)\beta - 4k^2\beta = n(n-1),$$

le nombre k étant à volonté. Or cette équation ſe réſout ſans difficulté, en prenant $\alpha = \frac{2n-1}{n}$, & $\beta = \frac{1-n}{n}$. On aura donc

$$P^n = \frac{2n-1}{n}P^{n-1}p + \left(\frac{1-n}{n}\right)P^{n-2}(p^2-1);$$

Au moyen de cette formule, j'élimine les termes affectés de $p^2 - 1$ dans ma différentielle, & j'ai

$$\frac{dd(\mathrm{A}^n)}{dx\,dy} = [na + 2b(n-1)]\mathrm{P}^{n-1} - [3(n-2)b + 4(n-3)c]\mathrm{P}^{n-3}q + [5(n-4)c + 6(n-5)f]\mathrm{P}^{n-5}q^2 - \&c.$$
$$+ p \left\{ \begin{array}{l} n(n-1)\,a\,\mathrm{P}^{n-2} - (n-2)(n-3)\,b\,\mathrm{P}^{n-4}q + (n-4)(n-5)\,c\,\mathrm{P}^{n-6}q^2 - \&c. \\ -2(2n-1)\,b\,\mathrm{P}^{n-2} + 4(2n-3)\,c\,\mathrm{P}^{n-4}q - 6(2n-5)\,f\,\mathrm{P}^{n-6}q^2 + \&c. \end{array} \right\}$$

Il faut maintenant que les termes qui multiplient p ſe détruiſent d'eux-mêmes, & qu'on ait

$$b = \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\,a,\; c = \frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)}\,b,\; f = \frac{(n-4)(n-5)}{6(2n-5)}\,c, \;\&c.$$

Cette relation entre les coëfficiens a, b, c, f, &c. eſt d'autant plus ſingulière, que la valeur générale de A^n ſemble n'être pas la même lorſque n eſt pair & lorſqu'il eſt impair. En effet, nous avons

$$\mathrm{A}^{2m} = \frac{2m+1.2m+3\ldots4m-1}{2.4\ldots\ldots2m}\mathrm{P}^{2m} - \frac{2m-1.2m+1\ldots4m-3}{2.4\ldots\ldots2m}\,m\,\mathrm{P}^{2m-2}q$$
$$+ \frac{2m-3\ldots4m-5}{2\ldots2m}.\frac{m.m-1}{2}\mathrm{P}^{2m-4}q^2 - \&c.$$

$$\mathrm{A}^{2m+1} = \frac{2m+3.2m+5\ldots4m+1}{2.4\ldots\ldots2m}\mathrm{P}^{2m+1} - \frac{2m+1.2m+3\ldots4m-1}{2.4\ldots\ldots2m}\,m\,\mathrm{P}^{2m-1}q$$
$$+ \frac{2m-1\ldots4m-3}{2.4\ldots2m}.\frac{m.m-1}{2}\mathrm{P}^{2m-3}q^2 - \&c.$$

Cependant on trouve, dans les deux cas, que les relations précédentes entre les coëfficiens a, b, c, &c. ſont exactes. On a donc

$$\frac{dd(\mathrm{A}^n)}{dx\,dy} = \frac{n}{2n-1}.an^2\mathrm{P}^{n-1} - \frac{n-2}{2n-3}bn^2\mathrm{P}^{n-3}q + \frac{n-4}{2n-5}.cn^2\mathrm{P}^{n-5}q^2 - \&c.$$

& pour que cette quantité ſe réduiſe enfin à $n^2\,\mathrm{A}^{n-1}$ ou $n^2\,(a'\,\mathrm{P}^{n-1} - b'\,\mathrm{P}^{n-3}\,q + \&c.)$, il faut que

$$a = \frac{2n-1}{n}\,a',\; b = \frac{2n-3}{n-2}\,b',\; c = \frac{2n-5}{n-4}\,c', \;\&c.$$

Ces égalités ſe vérifient en comparant les coëfficiens des formules A^{2m}, A^{2m+1}, A^{2m+2}. Mais on verra le tout d'un coup-d'œil,

d'œil, ainſi que les relations qui ont été données ci-deſſus entre les coëfficiens a, b, c, &c, ſi nous mettons la valeur de A^n ſous cette forme générale où il n'y a plus à diſtinguer le cas de n pair & celui de n impair.

$$\mathrm{A}^n = \frac{1.3.5\ldots\ldots2n-1}{1.2.3\ldots\ldots\ldots n}\mathrm{P}^n - \frac{1.3.5\ldots\ldots2n-3}{1.2.3\ldots\ldots n-2}.\frac{1}{2}\mathrm{P}^{n-2}q$$
$$+ \frac{1.3.5\ldots\ldots2n-5}{1.2.3\ldots\ldots n-4}.\frac{1}{2.4}\mathrm{P}^{n-4}q^2 - \frac{1.3.5\ldots2n-7}{1.2.3\ldots n-6}.\frac{1}{2.4.6}\mathrm{P}^{n-6}q^3$$
$$+ \frac{1.3.5\ldots\ldots2n-9}{1.2.3\ldots\ldots n-8}.\frac{1}{2.4.6.8}\mathrm{P}^{n-8}q^4 - \&c.$$

24. L'équation $\frac{dd\,\mathrm{A}^n}{dx\,dy} = n^2\,\mathrm{A}^{n-1}$ étant ainſi vérifiée, j'appelle X^n la quantité

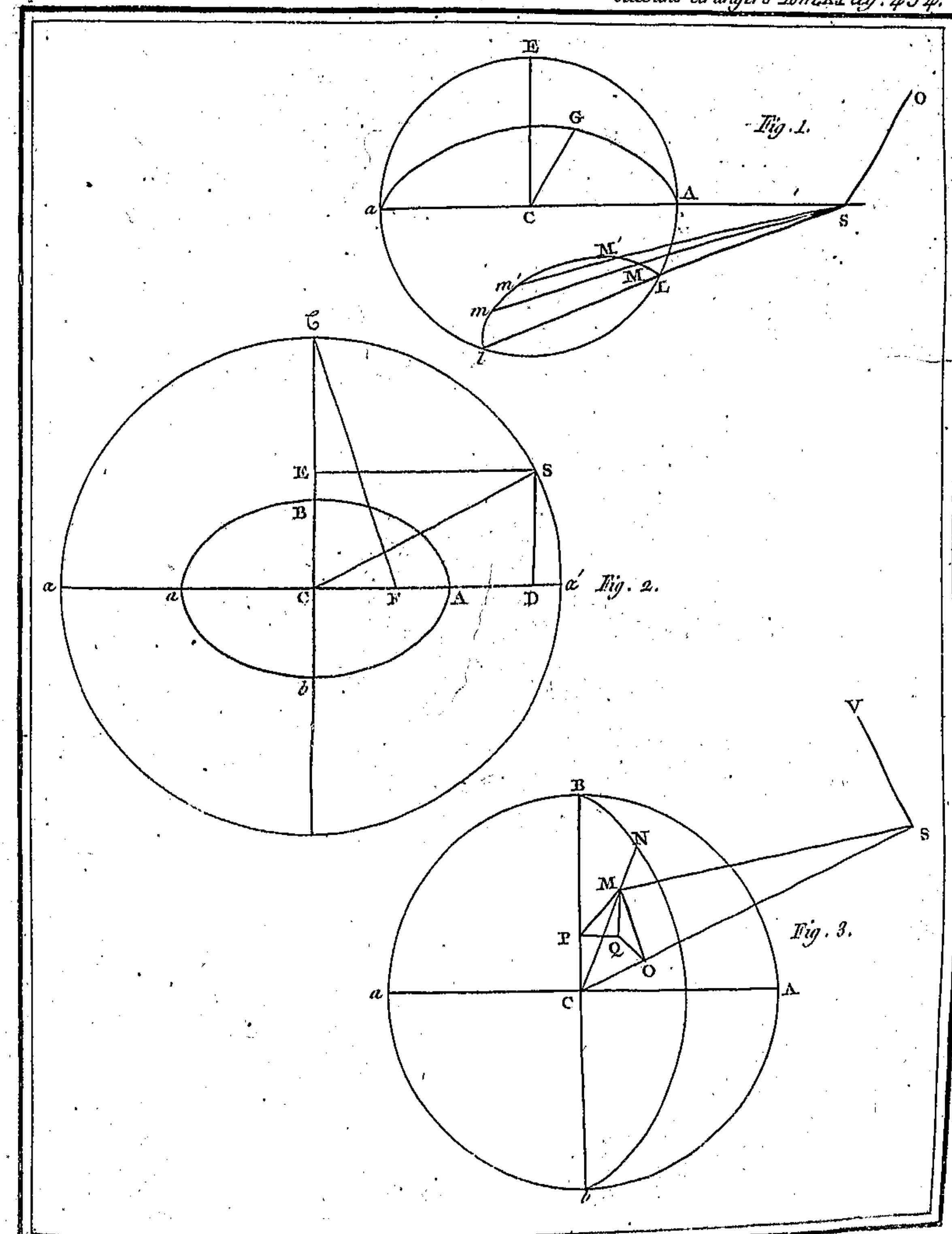
$$x^n - \frac{n.n-1}{2.2}x^{n-2} + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{2.2.4.4}x^{n-4} - \&c.$$

& Y^n une ſemblable fonction de y; je ſuppoſe qu'on a trouvé $\mathrm{A}^{n-1} = \mathrm{X}^{n-1}\,\mathrm{Y}^{n-1}$, & je vais démontrer qu'il en réſulte $\mathrm{A}^n = \mathrm{X}^n\,\mathrm{Y}^n$. Car ſoit $\mathrm{A}^n = \mathrm{X}^n\,\mathrm{Y}^n + u$, puiſque $\frac{dd\mathrm{A}^n}{dx\,dy} = n^2\,\mathrm{A}^{n-1}$, & $\frac{d\mathrm{X}^n}{dx} = n\,\mathrm{X}^{n-1}$, on aura $\frac{ddu}{dx\,dy} = 0$. Donc $u = \varphi : x + \psi : y$. Mais les quantités x & y doivent entrer de la même manière dans A^n; ainſi les deux fonctions arbitraires déſignées par φ & ψ ſont égales. On aura donc $\mathrm{A}^n = \mathrm{X}^n\,\mathrm{Y}^n + \varphi : x + \varphi : y$. Si n eſt impair, & qu'on faſſe $x = 0$, les quantités A^n & X^n s'évanouiſſant, on aura $\varphi : y + \varphi : 0 = 0$. Donc $\varphi : y$ eſt conſtant, il en eſt de $\varphi : y + \varphi : 0 = 0$. Donc $\varphi : y$ eſt conſtant, il en eſt de même de $\varphi : x$; & puiſque leur ſomme s'évanouit dans un cas particulier, on a toujours $\mathrm{A}^n = \mathrm{X}^n\,\mathrm{Y}^n$.

Si n eſt pair, $\varphi : x$ ſera une fonction paire de x, puiſqu'il n'entre que des puiſſances paires de x dans A^n & X^n. On peut donc écrire $\mathrm{A}^n = \mathrm{X}^n\,\mathrm{Y}^n + \psi : x^2 + \psi : y^2$. Mais dans le cas particulier où $y^2 = -1$, on a $A^n = X^n Y^n$. Donc $\psi : x^2 + \psi : -1 = 0$; donc les fonctions $\psi : x^2$, $\psi : y^2$ ſont encore conſtantes, & puiſque leur ſomme s'évanouit dans le cas particulier où $y^2 = -1$, elle s'évanouit toujours, & on a encore $A^n = X^n Y^n$.

Donc la décompoſition de A^{n-1} entraîne néceſſairement celle de A^n; & puiſque la décompoſition de A^n eſt évidente pour les premières valeurs de n, elle eſt donc vraie pour toutes les autres. C'eſt ce qu'il falloit démontrer.

Pl. VIII.



C.ne Haussard.